

АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ОБОБЩЕНИ ШАХМАТНИ ИГРИ

Кратка идея на решението

За фиксиран правоъгълник (r, c) трябва да изберем два цвята c_0 и c_1 (за клетките с четна и нечетна сума на координатите).

- клетките с $(i+j)$ четно трябва да бъдат в един цвят c_0 ;
- клетките с $(i+j)$ нечетно трябва да бъдат в друг цвят c_1 ;
- ако $c_0 \neq c_1$, автоматично няма две съседни клетки с еднакъв цвят, защото съседните клетки винаги са с различна четност на $(i+j)$;

Затова задачата се свежда до избиране на най-подходящите два цвята за двата вида клетки така, че да преобядисаме минимален брой от тях.

Подзадача 1. ($n \leq 50$)

Вместо да броим колко клетки трябва да се преобядисат, ще правим обратното — ще броим колко клетки няма да променят цвета си. Искаме да максимизираме броя на такива клетки.

Имаме два типа клетки (i, j) — такива, за които $(i + j) \bmod 2 = 0$, и такива, за които $(i + j) \bmod 2 = 1$, като те трябва да са с различни цветове. Нека фиксираме подправоъгълника (r, c) , за който решаваме задачата. Трябва да фиксираме два цвята col_1 и col_2 , за да да максимизираме сумата от броя на клетките с $(i + j) \bmod 2 = 0$ в цвят col_1 , и броя на клетките с $(i + j) \bmod 2 = 1$, които са оцветени в цвят col_2 .

Създаваме структура от данни, в която ще можем да добавяме двойка (col, cnt) и да поддържаме двата максимума по cnt за различни цветове col . Обхождаме всички клетки на подправоъгълника (r, c) и изчисляваме за всеки цвят и за всеки тип клетка (остатък по модул 2) броя на срещанията. След това намираме двата максимума за клетките от тип 1 и тип 2 (с помощта на структурата, която дефинирахме по-горе). Сега, ако най-често срещаният цвят при клетките от тип 1 и най-често срещаният цвят при клетките от тип 2 са различни, тогава е изгодно да ги оставим такива. Ако обаче са еднакви, трябва да разгледаме два варианта:

- вторият по честота цвят при клетките от тип 1 + най-честият цвят при клетките от тип 2;
- най-честият цвят при клетките от тип 1 + вторият по честота цвят при клетките от тип 2.

Вземаме максимума измежду тези възможни варианти, и отговорът за подправоъгълника (r, c) ще бъде $(r * c - \text{броя на клетките, които са запазили цвета си})$.

Подзадача 2. ($n \leq 200$)

Тази подзадача е близка до пълното решение, но в нея може да се реализира структура, която поддържа два максимума, или да се използват структури от данни, но не по най-оптималния начин.

Нека фиксираме r и да намерим отговора за всички подправоъгълници (r, c) . Обхождаме c във възходящ ред и поддържаме за всеки цвят и за всеки вид клетка броя на срещанията на този цвят в текущия подправоъгълник (r, c) . Освен това за двата вида клетки ще поддържаме двата най-често срещани цвята, както в подзадача 1. При преминаване от c към $c + 1$ добавяме r -те клетки, които се включват при разширяването на правоъгълника с още един стълб.

Подзадача 3. (Само два различни цвята)

За всеки подправоъгълник имаме само две възможни конфигурации на оцветяване. Ако двата цвята са, например, черен и бял, съществуват само два правилни шахматни шаблона:

1. Клетките с $(i + j) \bmod 2 = 0$ са черни, а клетките с $(i + j) \bmod 2 = 1$ са бели;
2. Клетките с $(i + j) \bmod 2 = 0$ са бели, а клетките с $(i + j) \bmod 2 = 1$ са черни.

Тъй като няма други цветове, достатъчно е да преброим колко преобядисвания са необходими за всеки от тези два варианта и да вземем по-малкия резултат. Това прави подзадачата значително по-лесна от общия случай.

Подзадача 4. (Не повече от 10 различни цвята)

Тук идеята е, че броят на различните цветове е малък (най-много 10). Затова можем да разгледаме всички възможни двойки (c_0, c_1) , които ще се използват за двете четности на клетките. Такива двойки са най-много $10^2=100$, което е константа. За всяка двойка пресмятаме колко клетки съвпадат с желанния шахматен шаблон и намираме най-добрия резултат

Подзадача 5. (Не повече от 100 различни цвята)

Ограничението до 100 различни цвята е достатъчно слабо и тази група тестове може да бъде премината от решения с недостатъчно ефективна реализация

Пълно решение

Първо компресиране цветовете, т.е. ще направим така, че всички стойности да станат по-малки от n^2 . Компресирането на цветовете може да се реализира с помощта на хеш-таблица или чрез сортиране и двоично търсене. След това реализираме решението от подзадача 2, в което:

- за $O(1)$ поддържа броя на срещанията на всеки цвят;
- за $O(1)$ поддържа двата най-често срещани цвята.

Така получаваме решение със сложност $O(n^3)$, което без проблем преминава всички тестове.

Автор: Кинка Кирилова-Лупанова