ЛАГЕР ШКОЛА ЗА
ПОДГОТОВКА НА РАЗШИРЕНИТЕ ОТБОРИ
София, 27 юни 2026 г.
Анализ на задачите

Анализ. МУХЪЛ

⏳5 сек. 💾 512 MB

Подзадача 1 ($T_i = 1$, 4 точки)

Когато всички пръскания се изпълняват в един и същ ден, заразата няма време да се върне между тях, така че пръсканията се държат като обикновени отсечки с цени и търсим *най-евтиното покритие* на $[1, N]$ с тях.

Сортираме пръсканията по десен край R и дефинираме

$$dp[i] = \min\{\, dp[j] : j \text{ е разгледан преди } i \text{ и } L_i - 1 \le R_j \,\} + C_i,$$

т.е. най-малката цена да покрием $[1, R_i]$, завършвайки с пръскане i (отделно $dp[i] = C_i$, ако $L_i = 1$). Множеството допустими предшественици j образува *наставка* по стойност на R_j, затова минимумът се намира с дърво за интервали (range-min, point-update). Сложност $O(M \log M)$.

Подзадача 2 ($M \leq 16$, 5 точки)

Перебираме всичките 2^M подмножества от пръскания и за всяко проверяваме дали удовлетворява условието. Тъй като M е малко, проверката може да е „мързелива“ – например симулация или директна проверка за свързаност между пръскане, съдържащ участък 1, и пръскане, съдържащ участък N. Достатъчно е $O(2^M \cdot M^2)$.

Подзадача 3 ($M \leq 5\,000$, 30 точки)

Ключовото наблюдение: при едно валидно решение избраните пръскания образуват *граница* между заразената с мухъл и почистената област, която се „стеснява“ с времето, докато съседни пръскания се захващат един за друг. С други думи, достатъчно е да можем да тръгнем от пръскане, който покрива участък 1, и следвайки захванати помежду си пръскания да стигнем до пръскане, който покрива участък N. Това е **задача за най-къс път**.

Нека пръскане a може да предаде границата на пръскане b. Между моментите T_a и T_b заразата изяжда по $|T_a - T_b|$ клетки от всяка страна, така че излекуваните области се застъпват точно когато

$$L_b \leq R_a - |T_a - T_b| + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad R_a - L_b \geq |T_a - T_b| - 1.$$

Тогава строим ориентиран ръб $a \to b$ с цена C_b. Изворите са пръсканията с $L = 1$ (с начална цена C), а целта е пръскане с $R \geq N$. Дейкстра по този плътен граф дава отговора за $O(M^2)$.

Подзадача 4 (без допълнителни ограничения, 61 точки)

Сега не можем да построим всички $O(M^2)$ ребра. Използваме две свойства на задачата.

Свойство 1 (завъртане на 45°). Полагаме

$$X_i = L_i - T_i, \qquad Y_i = L_i + T_i.$$

Тогава условието $L_b \le R_a - |T_a - T_b| + 1$ се разпада на *две* независими неравенства:

$$X_b \le R_a - T_a + 1 \qquad \text{и} \qquad Y_b \le R_a + T_a + 1.$$

Така пръсканията, достижими от a, са точно тези, чийто ляв край (в координати X, Y) попада в правоъгълна област – наставка по X и наставка по Y.

Свойство 2 (еднакви цени на входящите ребра). Всички ребра, влизащи в пръскане a, имат една и съща цена C_a, независимо от началото си. При Дейкстра това означава, че щом разстоянието до a бъде обновено за първи път, то вече е окончателно – значи всеки пръскане се „релаксира“ най-много веднъж.

Структура от данни. Сортираме пръсканията по X и построяваме дърво за интервали, чиито листа са отделни пръскания; всеки вътрешен възел пази пръсканията от своя X-обхват, *сортирани по* Y (изграждане чрез сливане, $O(M \log M)$). Изпълняваме Дейкстра: когато извадим пръскане a, отиваме до възлите, покриващи $X \le R_a - T_a + 1$, и във всеки от тях вземаме пръсканията по нарастващо Y, докато $Y \le R_a + T_a + 1$, като *ги изтриваме* от дървото след обработка. Понеже всеки пръскане се вижда и трие най-много веднъж (Свойство 2), общата работа е $O(M \log M)$ за достъпите до възлите плюс $O(M \log M)$ за изваждането на пръсканията. Това дава пълните точки.

Алтернативно пълно решение: едно дърво по Y

Свойство 1 и Свойство 2 позволяват и по-просто пълно решение – с едно-единствено дърво за интервали, без изграждане чрез сливане.

Компресираме координатата Y (нужно, тъй като $N \le 10^9$) и индексираме дърво за интервали по нея. Във всяко листо – фиксирана стойност на Y – държим още непосетените пръскания с тази координата в *сортиран по* X буфер (например `std::set`); листото пази най-малкото X в буфера, а всеки вътрешен възел – минимума на X върху своя Y-обхват заедно с индекса, който го реализира.

При Дейкстра, щом извадим пръскане a, многократно питаме за минимума на X върху *префикса* $Y \le R_a + T_a + 1$. Докато този минимум е $\le R_a - T_a + 1$, съответното пръскане b лежи в правоъгълника

$$X_b \le R_a - T_a + 1, \qquad Y_b \le R_a + T_a + 1,$$

тоест е достижимо: премахваме го от буфера му (и обновяваме листото), релаксираме $dist[b] = dist[a] + C_b$ и продължаваме. Когато минимумът надхвърли $R_a - T_a + 1$, в правоъгълника няма повече непосетени пръскания и спираме.

Понеже всяко пръскане се намира и изтрива най-много веднъж (Свойство 2), правим $O(M)$ успешни заявки плюс по една неуспешна на всяко изваждане от опашката, всяка за $O(\log M)$. Заедно с компресията на координатите сложността отново е $O(M \log M)$ – също пълни точки, но с осезаемо по-кратка имплементация.