

НШИ 2026

БРОЙНИ СИСТЕМИ

От Моника Велчева

mkvelcheva@outlook.com



Колко е това число?

1101

?

Една стойност. Различни записи.

Числото е идеята; записът е езикът.

13_{10}

десетичен запис

1101_2

двоичен запис

тринадесет

дума на български

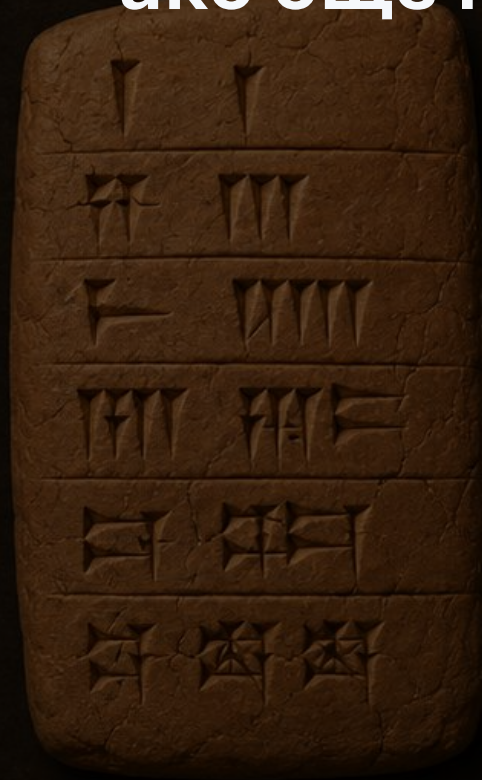
thirteen

дума на английски

$$13_{10} = 1101_2$$

Числото не се променя — променя се начинът, по който го записваме.

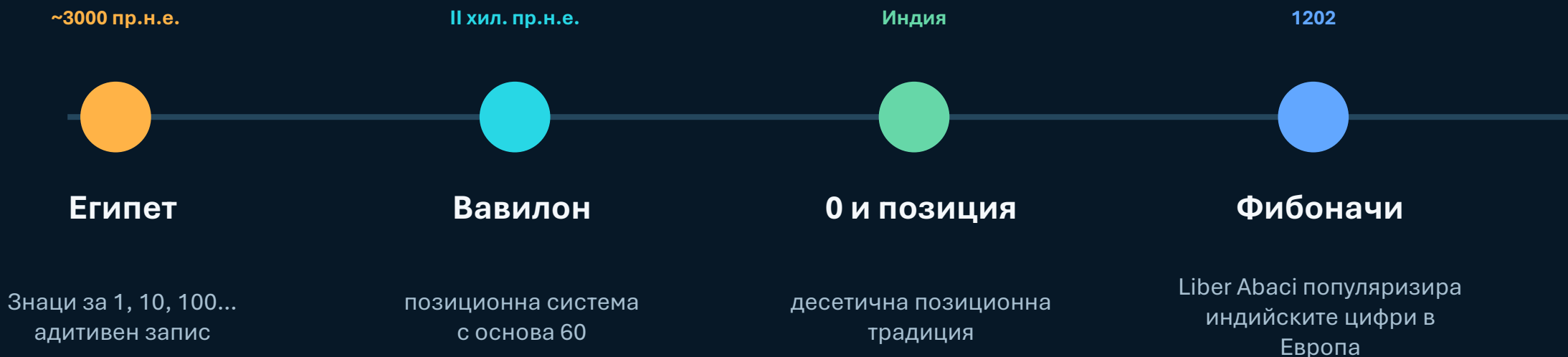
Как записваш 137 овце,
ако още няма цифри?



чертички → символи → позиции

Как стигаме до позиционния запис?

Четири идеи, които променят смятането.



Нулата не е „нищо“

Тя може да пази позиция.

205

≠

25

2 3 4 5 6 7 8 9

Индийската традиция развива десетичния позиционен запис; знанията стигат до Европа през ислямския математически свят.

Защо точно 10?

Най-естественото обяснение е буквално пред нас.



10

Но нищо не ни задължава да използваме основа 10.

Какво всъщност означава 583?

5

СТОТИЦИ

10^2

100

8

десетици

10^1

10

3

единици

10^0

1

$$583 = 5 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

Стойността на цифрата зависи и от мястото ѝ.

Една стъпка наляво = умножение по основата

В десетичната система основата е 10.

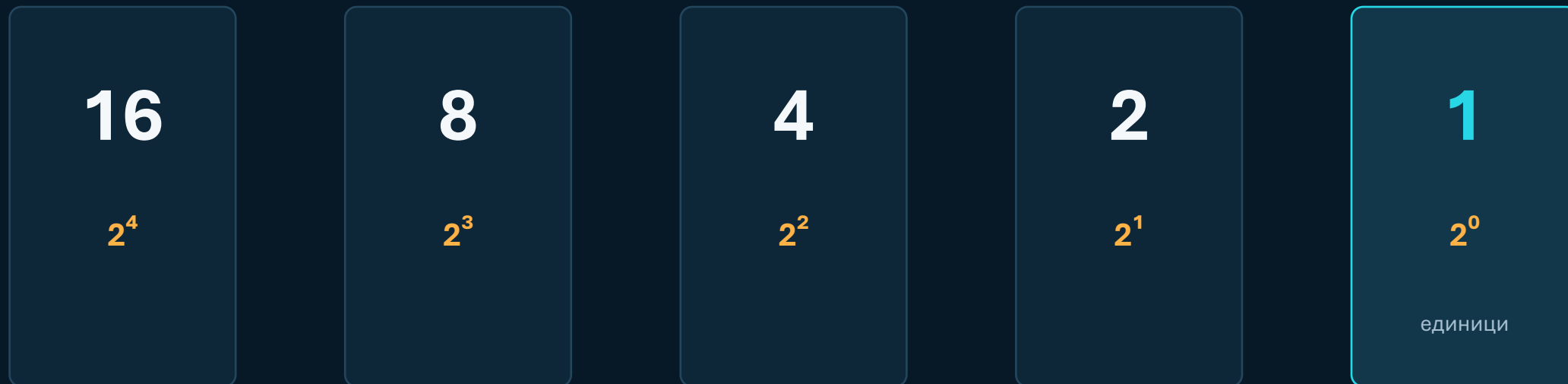


$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$

А ако умножаваме по 2?

Същата идея, но с основа 2

Позициите вече са степени на 2.

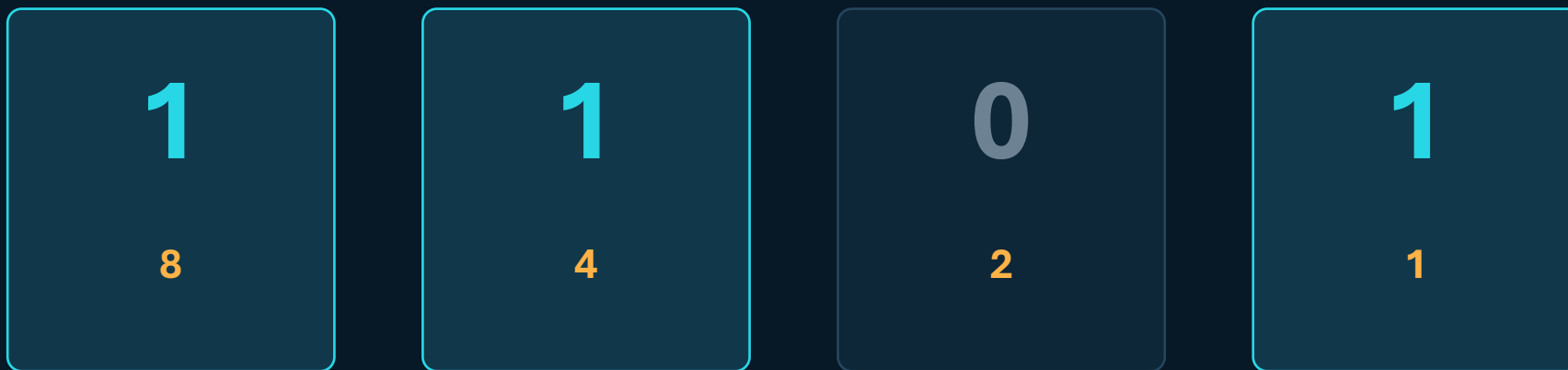


... всяка стъпка наляво е $\times 2$

В двоичната система цифрите са само 0 и 1.

Защо $1101_2 = 13_{10}$?

Сега вече можем да го „прочетем“.



$$1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 13$$

$$1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Ваш ред

$$101101_2 = ?_{10}$$

Подсказка: 32 16 8 4 2 1

Малка състезателна хитрост

Всички единици са „едно по-малко“ от следващата степен на 2.

$$11111_2 = ?$$



$$100000_2 = 64$$

$$11111_2 = 64 - 1 = 63$$

А защо само основа 2?

Същата идея работи за всяка основа $b \geq 2$.

123₄

1

16

2

4

3

1

$$123_4 = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 = 27_{10}$$

Позволен или непозволен е записът?

При основа b ползваме цифри от 0 до $b-1$.

10201_2

?

20102_3

?

243_5

?

777_8

?

908_9

?

$0 \leq \text{цифра} < \text{основа}$

Универсалното правило

Дефиницията в общия случай.

$$a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 \quad b$$



$$a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

$$0 \leq a_i < b$$

Можем ли без степени?

Да — ще сглобим стойността цифра по цифра.

1101₂

старт 0

чета 1 $0 \cdot 2 + 1 = 1$

чета 1 $1 \cdot 2 + 1 = 3$

чета 0 $3 \cdot 2 + 0 = 6$

чета 1 $6 \cdot 2 + 1 = 13$

Защо $\text{ans} = \text{ans} \cdot 2 + \text{digit}$?

Добавянето на нова цифра измества стария запис наляво.

Десетична система

53 → 537

$$53 \cdot 10 + 7 = 537$$

Двоична система

$110_2 \rightarrow 1101_2$

$$6 \cdot 2 + 1 = 13$$

Общо: $\text{new} = \text{old} \cdot \text{base} + \text{digit}$

$$3204_5 = ?_{10}$$

От математиката към C++

Двоичният запис го четем като string.

```
string s;  
cin >> s;  
  
long long ans = 0;  
int base = 2; // тук можем да си изберем основа  
  
for (int i = 0; i < s.size(); i++) {  
    int digit = s[i] - '0';  
    ans = ans * base + digit;  
}  
  
cout << ans << '\n';
```

#include <iostream> и <string> са пропуснати за четливост.

От математиката към C++

При база > 10 трябва да внимаваме с ASCII таблицата

```
long long ans = 0;
int base = 16;

for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
    int digit;
    if('0' <= s[i] && s[i] <= '9')
        digit = s[i] - '0';
    else
        digit = s[i] - 'a';
    ans = ans * base + digit;
}

cout << ans << '\n';
```

#include <iostream> и <string> са пропуснати за четливост.

Изпълняваме програмата на ръка

s = "10110"

s[i]	digit	ans преди	ans след
'1'	1	0	$0 \cdot 2 + 1 = 1$
'0'	0	1	$1 \cdot 2 + 0 = 2$
'1'	1	2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$
'1'	1	5	$5 \cdot 2 + 1 = 11$
'0'	0	11	$11 \cdot 2 + 0 = 22$

$$10110_2 = 22_{10}$$

Сега наобратно

$$13_{10} = ?_2$$

$$28_{10} = ?_2$$

Каква е последната цифра?

$$28 \% 2$$

А предпоследната?

„изтриваме“ текущата последна и използваме предното

А как да „изтрием“ последната цифра?

$$28 / 2$$

Накрая не забравяме да обърнем резултата!

Изпълняваме програмата на ръка

x	Last digit
28	0
14	0
7	1
3	1
1	1
0	—



$$28_{10} = 11100_2$$

$$1523_{10} = ?_5$$

x	Last digit
1523	3
304	4
60	0
12	2
2	2
0	—



$$1523_{10} = 22043_5$$

Двата алгоритъма един до друг

Единият разглобява; другият сглобява.

Десетично → двоично

- 1 делим на 2
- 2 вземаме остатъка
- 3 четем остатъците обратно

$$13_{10} \rightarrow 1101_2$$

Двоично → десетично

- 1 четем отляво надясно
- 2 $\text{ans} = \text{ans} \cdot 2 + \text{digit}$
- 3 получаваме стойността

$$1101_2 \rightarrow 13_{10}$$

Задачи •

Работете самостоятельно 4–5 минуты.

1

$$101011_2 \rightarrow ?_{10}$$

2

$$100001_2 \rightarrow ?_{10}$$

3

$$53_{10} \rightarrow ?_2$$

4

$$123_4 \rightarrow ?_{10}$$

Задачи •

Сега алгоритъмът става програма.

A

Двоично → десетично

Вход: двоичен запис като string.

Изход: десетичната стойност.

Input: 101101

Output: 45

B

Основа b → десетично

$2 \leq b \leq 9$.

Прочетете запис s и намерете стойността.

Input: 4 123

Output: 27

Задачи •

Не преобразувайте всичко, ако не е нужно.

1

Огромно двоично число завършва на 1.
Четно или нечетно?

2

Кога двоично число се дели на 4?

3

$111111111_2 = ?$

4

Колко стойности могат да се запишат с 8 бита?

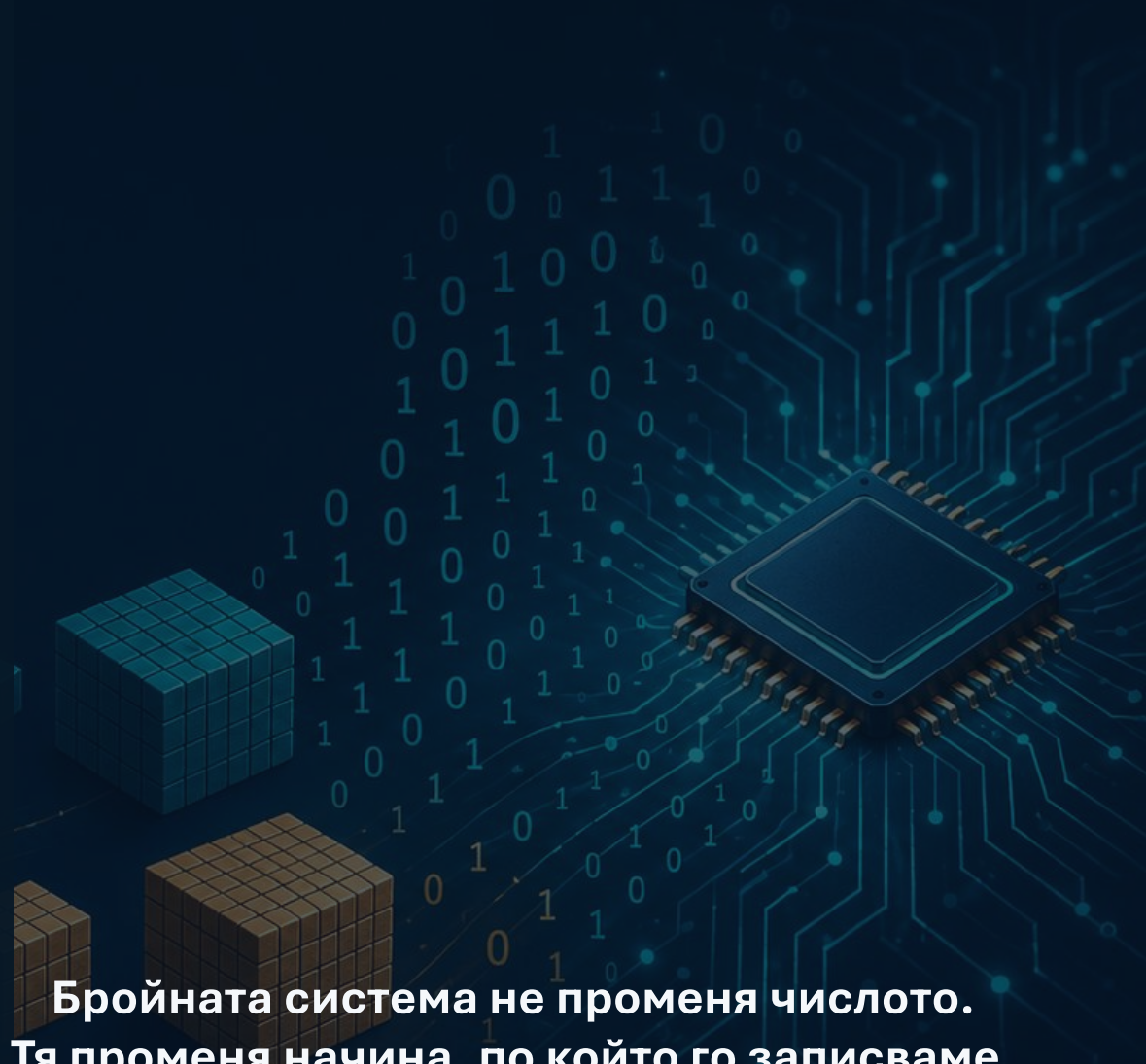
1101

Колко е това число?

Правилният отговор вече е:

„В коя бройна система?“

$$1101_2 = 13_{10}$$



Бройната система не променя числото.
Тя променя начина, по който го записваме.

Още задачи...

<https://arena.infosbg.com/#/catalog/267/problem/100762>

<https://arena.infosbg.com/#/catalog/226/problem/100592>

<https://arena.infosbg.com/#/catalog/50/problem/100102>

<https://arena.infosbg.com/#/catalog/91/problem/100207>

Благодаря за вниманието!

[illegible]