Анализ

Можем да обходим числата от a до b, като за всяко число отделяме цифрите му и намираме тяхната сума. Сложността на това решение е $O(t * (b - a) * \log_{10} b)$ и то би получило 30 точки.

Нека с $f(n)$ да означим сбора от цифрите на числата от 1 до n. Отговорът за дадени a и b е $f(b) - f(a - 1)$. Ще разгледаме бърз начин да намерим $f(n)$. Първо ще покажем, че $f(10^n - 1) = n * 45 * 10^{n-1}$. Да разгледаме всички n-цифрени числа, включително тези с водещи нули (т.е. числата от 0 до $10^n - 1$, като числата с по-малко от n цифри дописваме отпред с нули). Сумата от техните цифри е точно колкото сумата от цифрите на числата от 1 до $10^n - 1$, защото водещите нули, които поставихме, не променят въпросната сума. Да видим в колко от тези числа на първа позиция стои цифрата 1. Когато имаме 1 на първа позиция, ни остават още $n - 1$ позиции, на които можем да поставим коя да е от десетте цифри. Тоест имаме 10^{n-1} варианта за избор на останалите цифри и значи в 10^{n-1} от числата на първа позиция стои цифрата 1. Това означава, че сумата от цифрите 1, които стоят на първа позиция в някое число, е $1 * 10^{n-1}$. Аналогично имаме 10^{n-1} числа, в които на първа позиция стои цифрата 2, и следователно сумата от цифрите 2, които стоят на първа позиция в някое число, е $2 * 10^{n-1}$. По същия начин виждаме, че сумата от цифрите i, които стоят на първа позиция в някое число, е $i * 10^{n-1}$ за $i = 0, 1, 2, \dots, 9$. Тоест сумата от всички цифри, заемащи първа позиция в някое число, е $0 * 10^{n-1} + 1 * 10^{n-1} + \cdots + 9 * 10^{n-1} =$ $= (0 + 1 + \cdots + 9) * 10^{n-1} = 45 * 10^{n-1}$. Аналогично, сумата от всички цифри на позиция k в числата е $45 * 10^{n-1}$ за $k = 1, 2, \dots, n$, защото за цифрите на позиция k важат същите разсъждения, които направихме за цифрите на първа позиция. Следователно сумата от всички цифри е $n * 45 * 10^{n-1}$. Така доказахме, че $f(10^n - 1) =$ $= n * 45 * 10^{n-1}$, което означава, че можем да пресметнем $f(10^n - 1)$ за константно време (като предварително сме си записали в масив степените на 10). Сега да разгледаме как да намерим $f(x)$ за произволно x (за яснота, успоредно на общия случай, ще разгледаме и пример, когато $x = 5922$). Да отделим първата цифра на числото от останалите и да я означим с dig, а остатъка да означим с rem (за $x = 5922$, $dig = 5$ и $rem = 922$). Първо можем лесно да пресметнем сумата от цифрите на числата от 0 до $dig * 10^{n-1} - 1$ (включваме нулата само за удобство), използвайки стойността на $f(10^{n-1} - 1)$, като n е броят цифри на x (в този случай намираме сумата от цифрите на числата от 0 до 4999, използвайки $f(999)$). Сборът от цифрите на първите 10^{n-1} числа сред тях (тук от 0 до 999) е $0 * 10^{n-1} + f(10^{n-1} - 1)$ (тук $0 * 10^3 + f(999)$), тъй като събираемото $0 * 10^{n-1}$ идва от първата цифра на всяко от тези n-цифрени числа (отново разглеждаме числата с водещи нули), а $f(10^{n-1} - 1)$ идва от останалите цифри на числата, които на практика образуват просто числата от 0 до $10^{n-1} - 1$. Аналогично, сборът от цифрите на вторите 10^{n-1} числа (от 1000 до 1999) е $1 * 10^{n-1} + f(10^{n-1} - 1)$ (тук $1 * 10^3 + f(999)$), на третите 10^{n-1} е $2 * 10^{n-1} + f(10^{n-1} - 1)$ и т.н. Така виждаме, че сборът от цифрите на числата от 0 до $dig * 10^{n-1} - 1$ е $\left(0 * 10^{n-1} + f(10^{n-1} - 1)\right) +$
$+\left(1 * 10^{n-1} + f(10^{n-1} - 1)\right) + \cdots + \left((dig - 1) * 10^{n-1} + f(10^{n-1} - 1)\right) =$
$= \left(0 + 1 + \cdots + (dig - 1)\right) * 10^{n-1} + dig * f(10^{n-1} - 1) =$
$= \frac{(dig-1)*dig}{2} * 10^{n-1} + dig * f(10^{n-1} - 1)$. Тоест сборът от цифрите на числата от 0 до

4999 е $\frac{4*5}{2} * 10^3 + 5 * f(999)$. Сега остава да намерим сумата от цифрите на числата от $dig * 10^{n-1}$ до x (в случая от 5000 до 5922). Всички те имат първа цифра dig (тук 5), а броят им е $x - dig * 10^{n-1} + 1 = rem + 1$ (тук 923). Значи сумата от първите цифри на тези числа е $dig * (rem + 1)$ (в случая $5 * 923$), а сумата от останалите им цифри можем да забележим, че е $f(rem)$ (в случая $f(922)$), защото ако премахнем първата цифра на всяко от числата, ще получим просто числата от 0 до rem. Следователно успяхме да разбием $f(x)$ на $\left(\frac{(dig-1)*dig}{2} * 10^{n-1} + dig * f(10^{n-1} - 1)\right) + \left(dig * (rem + 1)\right) + $ $+ f(rem)$. Тоест $f(5922) = \left(\frac{4*5}{2} * 10^3 + 5 * f(999)\right) + (5 * 923) + f(922)$. Първите две скоби можем да изчислим директно, а $f(rem)$ можем да получим, като извикаме рекурсивно функцията, която изчислява $f(x)$, но този път с параметър rem. По този начин след константен брой операции стигнахме до това да решим същата задача за число, което е с една цифра по-късо. Тоест, за да постигнем исканото, за всяка цифра правим $O(1)$ операции. Това означава, че сложността на цялото решение зависи само от броя цифри на a и b и броя въпроси в тестовия пример, т.е. е $O\left(t * (\log_{10} a + \log_{10} b)\right)$, което е достатъчно бързо и съответно ще получи 100 точки.

Автор: Добромир Ангелов