

Комбинаторика

Комбинации, вариации, пермутации

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_n = 1.2.3...(n-1).n = n!$$

Очаквана стойност

$$E(X) = \mu = \sum x \cdot P(x)$$

$P(x)$ – вероятността стойността да бъде x

Примери

- Купувате билет от лотарията за 2 лв. за печалба 100 лв. при шанс за печалба 1%. Каква е очакваната печалба?
- Каква е очакваната печалба, ако купите 3 билета от същата лотария?

Очаквана стойност при независещи събития

A_1, A_2, \dots, A_n

- събития, независещи едно от друго

$E(A_1), E(A_2), \dots, E(A_n)$

- очаквани стойности при сбъдване на тези събития

$$E(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = E(A_1) + E(A_2) + \dots + E(A_n)$$

Очаквана стойност при несъвместими събития

A_1, A_2, \dots, A_n

$E(A_1), E(A_2), \dots, E(A_n)$

$P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$

- събития, от които може да се случи най-много едно

- очаквани стойности при съдване на тези събития

- вероятности за съдване на събитията (сборът им е 1)

$$E(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1)E(A_1) + P(A_2)E(A_2) + \dots + P(A_n)E(A_n)$$

Задача Tickets

<https://action.informatika.bg/problems/227>

P_1, P_2, \dots, P_N - цена на билета на съответната спирка

M – глоба

Контрольорът проверява за билети на случаен принцип една от спирките. Ако Ели няма билет – плаща глоба.

Каква е очакваната сума, която Ели ще заплати, при оптимален избор къде (и дали) да си купи билет?

Решение Tickets

- Ако Ели не купи билет, то очакваната стойност е $E=M$
- Ако Ели купи билет на спирка P_i :
 - Шансът контролорът да я хване е $(i-1)/N$
 - Шансът да не я хване е $(n-i+1)/N$ \Rightarrow Очакваната стойност е $E=(i-1)/N * M + (n-i+1)/N * P_i$

Смятаме очакваната стойност за всяко i и намираме най-малката за $O(N)$

Задача Mortal Kombat

<https://action.informatika.bg/problems/97>

Ели участва в турнир, където N бойци са по-силни и M бойци са по-слаби от нея. За всяка битка двама от все още живите участници биват избрани на произволен принцип с равна вероятност.

- Ако и двамата са по-силни/по-слаби от Ели, и двамата умират
- Иначе, по-слабия умира

Каква е вероятността Ели да спечели?

Решение Mortal Kombat

Ще използваме динамично с мемоизация:

$dp[i][j]$ – вероятността да се стигне до игра с i по-силни от Ели бойци и j по-слаби от нея (и разбира се Ели)

Означаваме Ели с E , по-силните от Ели с G и по-слабите от Ели с M

Да разгледаме вариантите за ходът точно преди да стигнем до играта (i,j)

- G с $G \Rightarrow$ предишната игра е била $(i+2,j)$
- G с $E \Rightarrow$ Ели умира и не е валиден ход
- G с $M \Rightarrow$ предишната игра е била $(i,j+1)$
- E с $M \Rightarrow$ предишната игра е била $(i,j+1)$
- M с $M \Rightarrow$ предишната игра е била $(i,j+2)$

<https://arena.olimpiici.com/#/catalog/437/problem/1188>

За дърво решението

За самостоятелна работа

- <https://codeforces.com/problemset/problem/1534/C>
- <https://codeforces.com/problemset/problem/1422/C>
- <https://codeforces.com/problemset/problem/1622/D>