Динамично оптимиране по профил

Младен Манев

Матрица – определение

Правоъгълна таблица от $m.n$ числа, разположени в m реда и n стълба, се нарича матрица от тип $m \times n$.

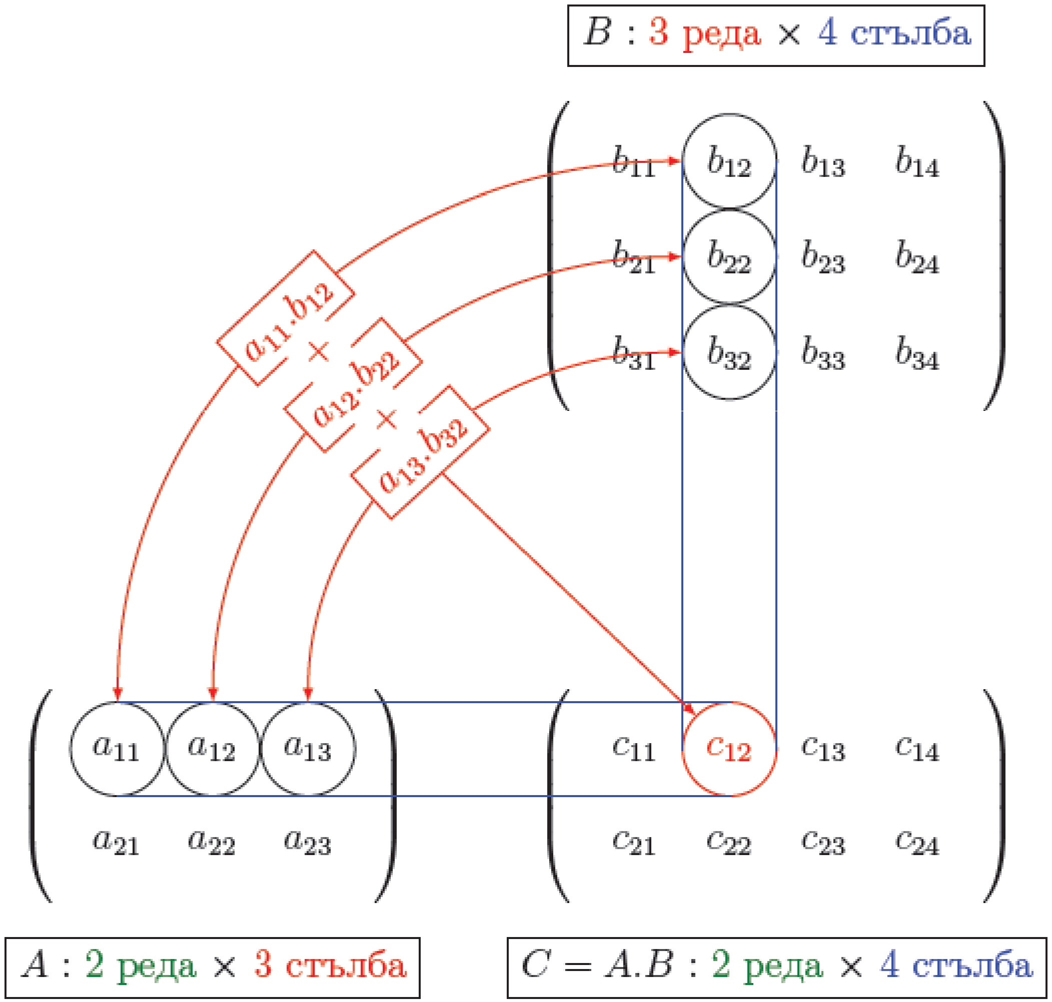
Матрица – определение

Правоъгълна таблица от $m.n$ числа, разположени в m реда и n стълба, се нарича матрица от тип $m \times n$.

Пример: Матрица от тип 2×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Умножение на матрици



Умножение на матрици

Пример: За матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ пресметнете

$A.B$ и $B.A$.

Умножение на матрици

Пример: За матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ пресметнете

$A.B$ и $B.A$.

Решение:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 + 2.3 + 3.1 & 1.1 + 2.2 + 3.2 \\ 2.2 + 4.3 + 1.1 & 2.1 + 4.2 + 1.2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 6 + 3 & 1 + 4 + 6 \\ 4 + 12 + 1 & 2 + 8 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 17 & 12 \end{pmatrix}$$

Умножение на матрици

Пример: За матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ пресметнете

$A.B$ и $B.A$.

Решение:

$$B.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 + 1.2 & 2.2 + 1.4 & 2.3 + 1.1 \\ 3.1 + 2.2 & 3.2 + 2.4 & 3.3 + 2.1 \\ 1.1 + 2.2 & 1.2 + 2.4 & 1.3 + 2.1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 2 & 4 + 4 & 6 + 1 \\ 3 + 4 & 6 + 8 & 9 + 2 \\ 1 + 4 & 2 + 8 & 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 7 & 14 & 11 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Единична матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единична матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Степенуване на матрица

A – квадратна матрица от ред n

A^0 – единична матрица от ред n

$$A^k = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{k \text{ пъти}}$$

Степенуване на матрица

A – квадратна матрица от ред n

A^0 – единична матрица от ред n

$$A^k = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{k \text{ пъти}}$$

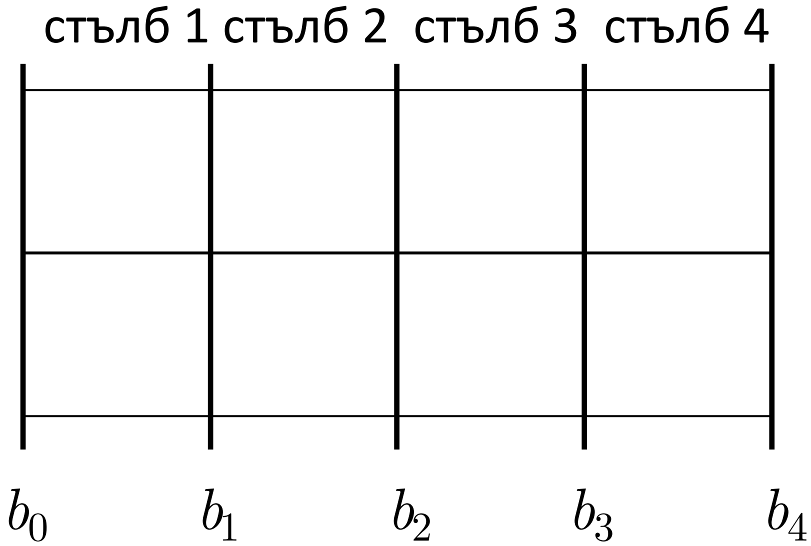
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

Задача 1

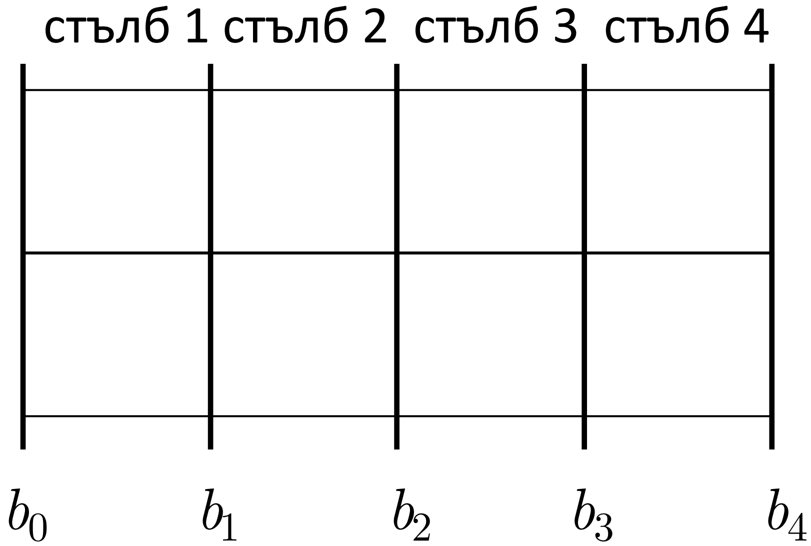
По колко начина клетките на правоъгълна таблица с 2 реда и 4 стълба могат да се оцветят в червено и черно, така че да няма две съседни черни клетки?

Задача 1



$b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4$ – *базови линии*

Задача 1

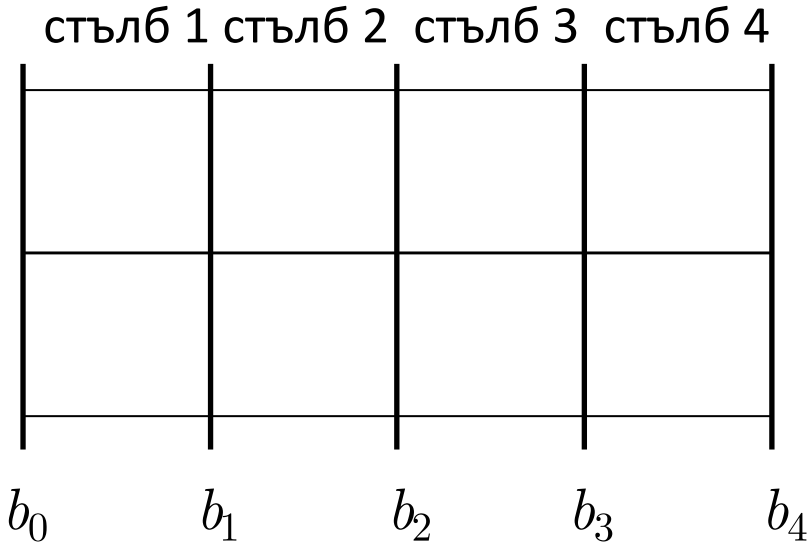


$b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4$ – *базови линии*

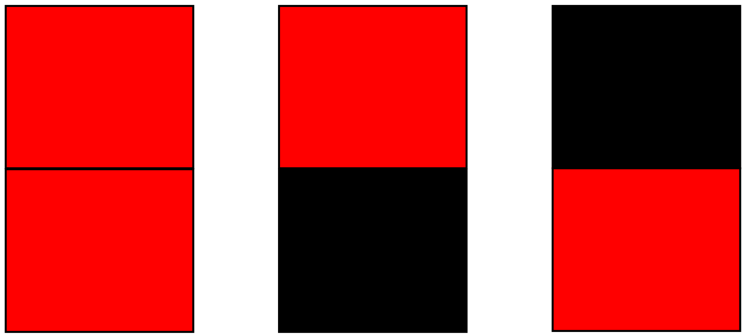
Профил за базовата линия b_i *(*$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$*)* ще наричаме битовата карта на стълба с номер i при следните условия:

1. Всички клетки вляво от b_i са оцветени според изискванията на задачата (няма две съседни черни клетки).
2. Всички клетки надясно от b_i не са оцветени.

Задача 1

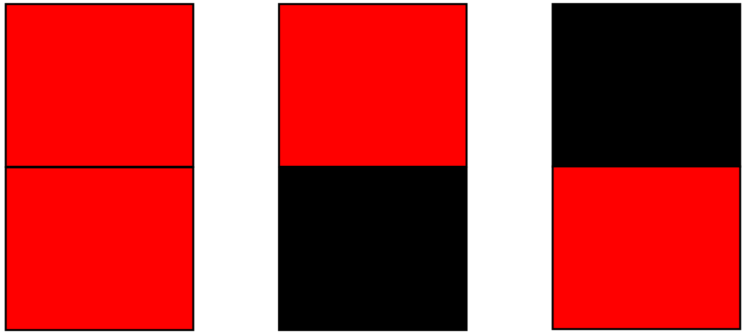


$b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4$ – *базови линии*



профил 0   профил 1   профил 2

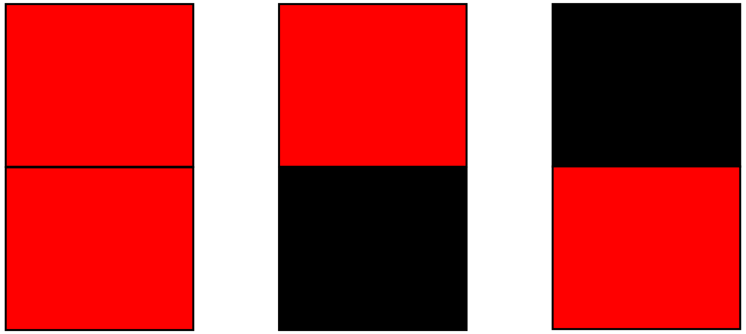
Задача 1



профил 0 профил 1 профил 2

$d_{p_1 p_2}$ – броят на начините, по които от профил p_1 за базовата линия b_i може да се получи профил p_2 за базовата линия b_{i+1}

Задача 1



профил 0   профил 1   профил 2

$d_{p_1 p_2}$ – броят на начините, по които от профил p_1 за базовата линия b_i може да се получи профил p_2 за базовата линия b_{i+1}

$$D = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} \\ d_{20} & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 1

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

Задача 1

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0^i & a_1^i & a_2^i \end{pmatrix}$$

Задача 1

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0^i & a_1^i & a_2^i \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 1

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0^i & a_1^i & a_2^i \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

Задача 1

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0^i & a_1^i & a_2^i \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

$$a_0^2 = a_0^1.d_{00} + a_1^1.d_{10} + a_2^1.d_{20}$$

$$a_1^2 = a_0^1.d_{01} + a_1^1.d_{11} + a_2^1.d_{21}$$

$$a_2^2 = a_0^1.d_{02} + a_1^1.d_{12} + a_2^1.d_{22}$$

Задача 1

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0^i & a_1^i & a_2^i \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

$$a_0^2 = a_0^1.d_{00} + a_1^1.d_{10} + a_2^1.d_{20}$$

$$a_1^2 = a_0^1.d_{01} + a_1^1.d_{11} + a_2^1.d_{21}$$

$$a_2^2 = a_0^1.d_{02} + a_1^1.d_{12} + a_2^1.d_{22}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} \\ d_{20} & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = A_1.D$$

Задача 1

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 1

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_2 . D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Задача 1

$$A_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_2.D = \begin{pmatrix}3 & 2 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 5 & 5\end{pmatrix}$$

$$A_4 = A_3.D = \begin{pmatrix}7 & 5 & 5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17 & 12 & 12\end{pmatrix}$$

Задача 1

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_2 . D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = A_3 . D = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

Отговор: $a_0^4 + a_1^4 + a_2^4 = 17 + 12 + 12 = 41$

Задача 1

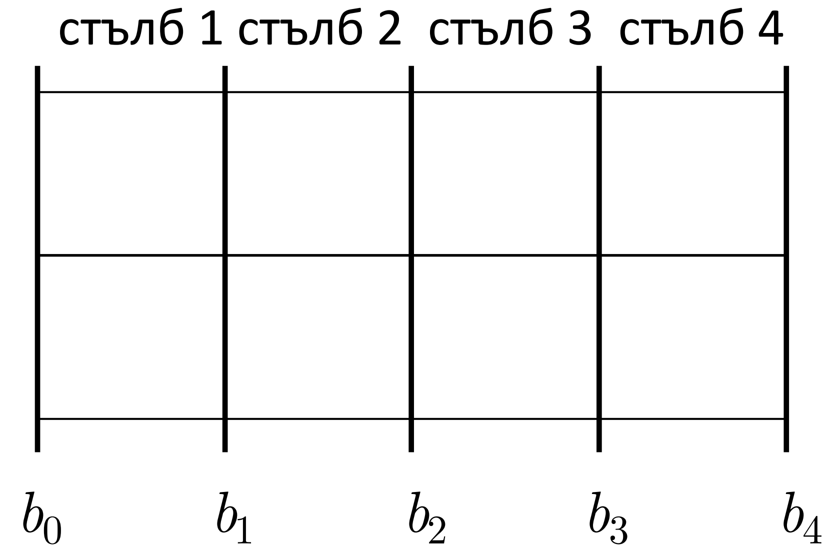
$$A_5 = A_4.D = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 12 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 29 & 29 \end{pmatrix}$$

Задача 1

$$A_5 = A_4.D = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 12 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 29 & 29 \end{pmatrix}$$

Отговор: $a_0^5 = 41$

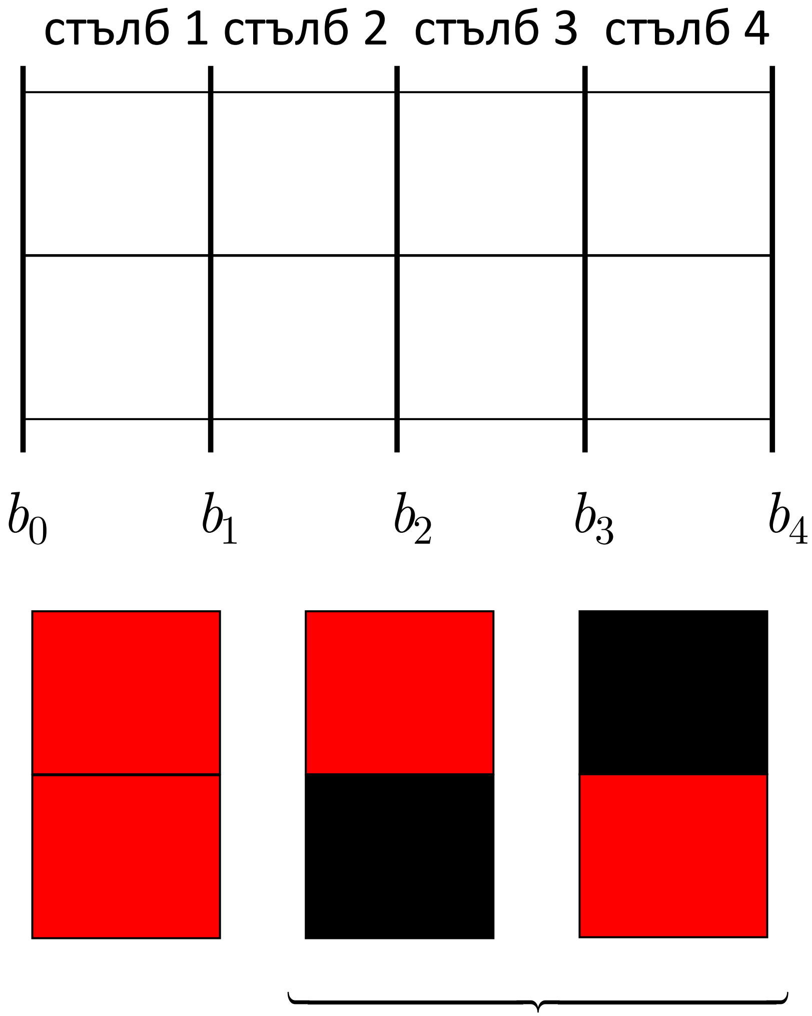
Задача 1 – втори начин



Профил за базовата линия b_i ($i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) ще наричаме различните възможности за стълба с номер i при следните условия:

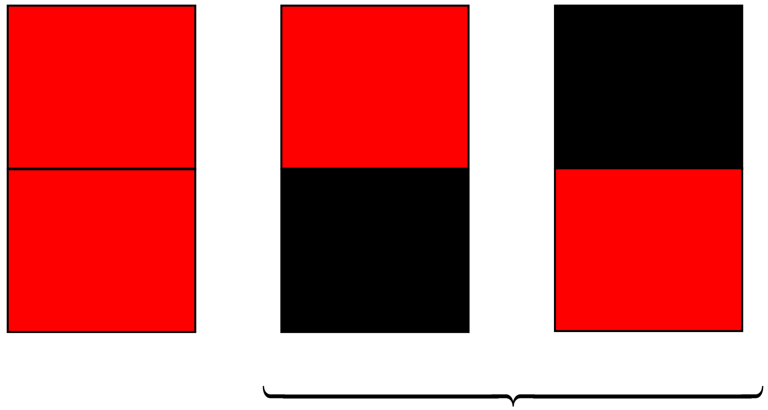
1. Всички клетки вляво от b_i са оцветени според изискванията на задачата (няма две съседни черни клетки).
2. Всички клетки надясно от b_i не са оцветени.

Задача 1 – втори начин



профил 0 профил 1

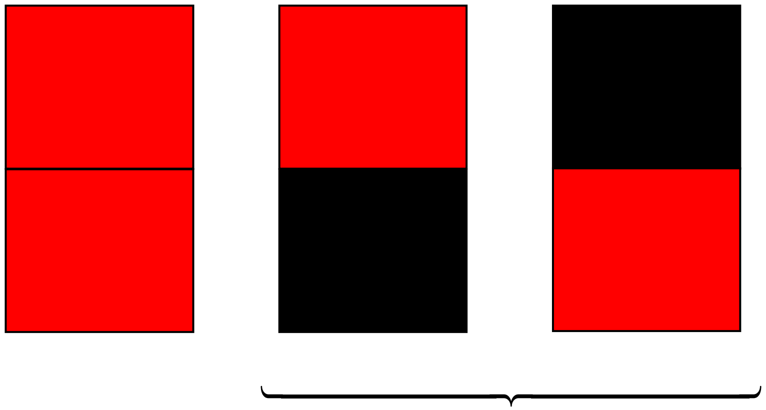
Задача 1 – втори начин



профил 0 профил 1

$d_{p_1p_2}$ – броят на начините, по които от профил p_1 за базовата линия b_i може да се получи профил p_2 за базовата линия b_{i+1}

Задача 1 – втори начин



профил 0 профил 1

$d_{p_1 p_2}$ – броят на начините, по които от профил p_1 за базовата линия b_i може да се получи профил p_2 за базовата линия b_{i+1}

$$D = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} \\ d_{10} & d_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 1 – втори начин

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

Задача 1 – втори начин

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0^i & a_1^i \end{pmatrix}$$

Задача 1 – втори начин

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0^i & a_1^i \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 1 – втори начин

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0^i & a_1^i \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = A_1.D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 1 – втори начин

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0^i & a_1^i \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = A_1.D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_2.D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Задача 1 – втори начин

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0^i & a_1^i \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = A_1.D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_2.D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = A_3.D = \begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 24 \end{pmatrix}$$

Задача 1 – втори начин

a_p^i – брой на начините за оцветяване на първите i стълба на таблицата, така че p да е профил за базовата линия b_i

$$A_i = \begin{pmatrix} a_0^i & a_1^i \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = A_1.D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = A_2.D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = A_3.D = \begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 24 \end{pmatrix}$$

Отговор: $a_0^4 + a_1^4 = 17 + 24 = 41$

Задача 1 – втори начин

$$A_5 = A_4.D = \begin{pmatrix} 17 & 24 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 58 \end{pmatrix}$$

Задача 1 – втори начин

$$A_5 = A_4.D = \begin{pmatrix} 17 & 24 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 58 \end{pmatrix}$$

Отговор: $a_0^5 = 41$

Задача 2

По колко начина клетките на правоъгълна таблица с 2 реда и m стълба могат да се оцветят в червено и черно, така че да няма две съседни черни клетки?

Задача 2

По колко начина клетките на правоъгълна таблица с 2 реда и m стълба могат да се оцветят в червено и черно, така че да няма две съседни черни клетки?

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = A_1.D$$

$$A_3 = A_2.D = (A_1.D).D = A_1.(D.D) = A_1.D^2$$

$$A_4 = A_3.D = \left(A_1.D^2\right).D = A_1.\left(D^2.D\right) = A_1.D^3$$

$$\vdots$$

$$A_m = A_{m-1}.D = \ldots = A_1.D^{m-1}$$

$$A_{m+1} = A_m.D = \ldots = A_1.D^m$$

Задача 2

По колко начина клетките на правоъгълна таблица с 2 реда и m стълба могат да се оцветят в червено и черно, така че да няма две съседни черни клетки?

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_0^1 & a_1^1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = A_1.D$$

$$A_3 = A_2.D = (A_1.D).D = A_1.(D.D) = A_1.D^2$$

$$A_4 = A_3.D = \left(A_1.D^2\right).D = A_1.\left(D^2.D\right) = A_1.D^3$$

$$\vdots$$

$$A_m = A_{m-1}.D = \ldots = A_1.D^{m-1}$$

$$A_{m+1} = A_m.D = \ldots = A_1.D^m$$

Отговор: $a_0^m + a_1^m = a_0^{m+1}$

Задача 3

Напишете програма `color1`, която по зададени стойности на целите числа m и k намира остатъка при деление на k на броя на начините, по които клетките на правоъгълна таблица с 2 реда и m стълба могат да се оцветят в червено и черно, така че да няма две съседни черни клетки ($1 < m < 10^{18},\ 2 < k < 10^8$).

Задача 3

```
typedef long long matrix[2][2];

int k;

void mult(matrix a, matrix b)
{
  matrix c;
  for(int i=0; i<2; i++)
    for(int j=0; j<2; j++)
    {
      c[i][j] = 0;
      for(int t=0; t<2; t++)
        c[i][j] = (c[i][j] +  a[i][t]*b[t][j]) % k;
    }
  for(int i=0; i<2; i++)
    for(int j=0; j<2; j++)
      a[i][j] = c[i][j];
}
```

Задача 3

```
void power(matrix x, long long p)
{
  matrix ans;
  for(int i=0; i<2; i++)
    for(int j=0; j<2; j++)
      if (i==j) ans[i][j] = 1;
      else ans[i][j] = 0;
  while(p)
  {
    if (p&1) mult(ans,x);
    mult(x,x);
    p >>= 1;
  }
  for(int i=0; i<2; i++)
    for(int j=0; j<2; j++)
      x[i][j] = ans[i][j];
}
```

Задача 4

Напишете програма color2, която по зададени стойности на целите числа n, m и k намира остатъка при деление на k на броя на начините, по които клетките на правоъгълна таблица с n реда и m стълба могат да се оцветят в червено и черно, така че да няма две съседни черни клетки ($0 < n < 8$, $1 < m < 10^{18}$, $2 < k < 10^8$).

Задача 5

Напишете програма `numbers`, която по зададени стойности на целите числа m и k намира остатъка при деление на k на броя на m-цифрените числа, съдържащи само цифрите 1 и 2, в които няма три последователни единици ($1 < m < 10^{18}$, $2 < k < 10^8$).

Задача 6

Правоъгълник със страни n и m е разделен на $n.m$ единични квадратчета, всяко от които е оцветено в черно или бяло. Казваме, че правоъгълникът е оцветен *симпатично*, ако не съдържа 2×2 квадрат, оцветен само в черно или само в бяло. Напишете програма $\texttt{color3}$, която по зададени стойности на целите числа n, m и k намира остатъка при деление на k на броя на *симпатичните* оцветявания на правоъгълника ($0 < n < 8$, $1 < m < 10^{18}$, $2 < k < 10^8$).

Задача 7

Дадена е таблица, съдържаща n реда и m стълба. Напишете програма $\texttt{parquet}$, която по зададени стойности на целите числа n, m и k намира остатъка при деление на k на броя на начините, по които таблицата може да се покрие с 2×1 и 1×2 правоъгълници, които не се припокриват ($0 < n < 8$, $1 < m < 10^{18}$, $2 < k < 10^{8}$).