Компютърна геометрия. Увод

Национална школа по информатика
Ямбол, 6 – 12 септември 2011 г.

I. Координатна система. Начало на координатната система. Координатни оси. Квадранти.

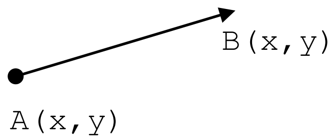
II. Представяне на геометрични обекти в равнината

1. ***Точка***

```
struct point
{
  int x; int y;
};
```

2. ***Вектор***

```
struct vect
{
  int a; int b;
};
```



a и b са разликите от координатите на точките, които дефинират вектора:
`a = |A.x - B.x|` и `b = |A.y - B.y|`

3. ***Права*** – определя се еднозначно от точка и вектор или от две точки.

```
struct line
{
  int X,Y;
  int a; int b;
};
```

Дължина на отсечка: `sqrt((x1-x2)*(x1-x2)+(y1-y2)*(y1-y2))`

Определяне на най-близка до центъра на координатната система точка.

x2 и y2 са равни на 0.

Общо уравнение на права

`f: A*x + B*y + C = 0`

Как да намерим A, B и C? Ще използваме детерминанта от 3 ред.

|x y 1| - x и y са тези показани във формулата
|x1 y1 1| - координатите на точка A
|x2 y2 1| - координатите на точка B

Стойността на детерминантата се получава по формулата:

(x*y1+y*x2+x1*y2)-(x2*y1+x*y2+y*x1)=0

Разкриваме скобите и след групиране получаваме:

x*(y1-y2)+y*(x2-x1)+(x1*y2-x2*y1)=0

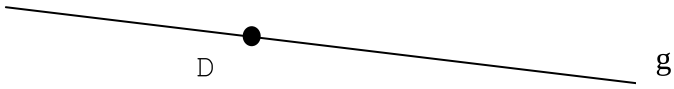
Следователно `A=y1-y2; B=x2-x1; C=x1*y2-x2*y1`

Така се намира уравнение на права минаваща през 2 точки A и B.

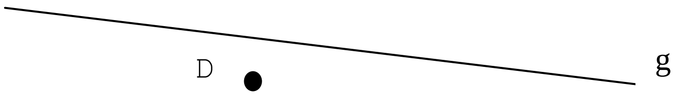
Взаимно положение на точка и права

Нека имаме уравнение на права g:Ax+By+C=0 и т.D(xd,yd), а (x_1,y_1), (x_2,y_2) са координатите на две точки от правата. Тогава т.D може да приема три положения:

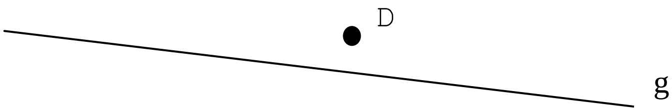
1. Да принадлежи на правата.



2. Да е под нея.



3. Да е над нея.



("под" - намира се в долната полуравнина спрямо правата g: и "над" - намира се в горната полуравнина спрямо правата g:)

Най-лесният начин да се провери това е чрез заместване на координатите на т.D в уравнението на правата g:. => Axd+Byd+C?=0

При заместване могат да се получат три възможности:

1.Резултатът да е по-голям от 0 - точката е над правата.
2.Резултатът да е по-малък от 0 - точката е под правата.
3.Резултатът да е равен на 0 - точката лежи на правата.
(ето защо и се появява този "?" в уравнението на правата)

```
int main()
{
int x1,x2,y1,y2,xd,yd;
cin>>x1>>y1;//Координатите на първата точка от
правата
```

```
cin>>x2>>y2;//Координатите на втората точка от правата
cin>>xd>>yd;//Координатите на точката, която ще проверяваме

//Основна част...

if((xd*(y1-y2)+yd*(x2-x1)+(x1*y2-x2*y1))==0)
 cout<<"Точката е на правата"<<endl;
if((xd*(y1-y2)+yd*(x2-x1)+(x1*y2-x2*y1))>0)
 cout<<"Точката е над правата "<<endl;
if((xd*(y1-y2)+yd*(x2-x1)+(x1*y2-x2*y1))<0)
 cout<<"Точката е под правата"<<endl;
return 0;
}
```

Пример 1. Дадени са 3 точки A, B и C. Определете, лежат ли те на една права.

Решение:
Трябва да изясним, успоредни ли са векторите AB и AC. Можем да изчислим координатите на тези вектори – това са просто разликите от координатите на точките.
За да бъдат векторите с координати (x1, y1) и (x2, y2) успоредни, трябва да съществува такова число **a**, че x2 = a * x1 и y2 = a * y1.
Затова първата идея се състои в това, да проверим равенството x2 / x1 = y2 / y1. Това не е желателно, тъй като x1 или y1 могат да се окажат равни на 0.
Вместо това ще проверяваме равенството x1 * y2 = x2 * y1.

```
struct point{int x; int y;};
bool isStraightLine(point A, point B, point C)
{ int x1=B.x-A.x;
  int y1=B.y-A.y;
  int x2=C.x-A.x;
  int y2=C.y-A.y;
  return (x1*y2==y1*x2);
}
```

4. ***Окръжност*** - определя се еднозначно от координатите на центъра си и дължината на раиуса

```
struct K
{
  float XC,YC;
 float R;
};
```

Уравнение на окръжност - нека центъра на окръжността е с координати (x_1, y_1) и R е радиусът на окръжността, тогава от уравнението на окръжност:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$$

Получаваме три случая за точка с координати (x, y):

1. Ако разстоянието от точката до центъра на окръжността е по-голямо от R^2 => точката е извън окръжността.

2. Ако разстоянието от точката до центъра на окръжността е равно на R^2 => точката принадлежи на окръжността.

3. Ако разстоянието от точката до центъра на окръжността е по-малко от R^2 => точката е вътре в окръжността.

Задача за принадлежност на точка в кръг. (задачата за стрелеца)

5. ***Триъгълник*** - определя се еднозначно от координатите на три точки в равнината. Изроден триъгълник – точките лежат на една права (лицето му е нула), неизроден триъгълник – точките не лежат на една права (лицето му е различно от нула).

6. ***Правоъгълник*** - определя се еднозначно от координатите на два срещуположни върха.

7. ***Ъгъл***

Аркустангенс на ъгъл – дава ни ъгъла в радиани между два вектора.

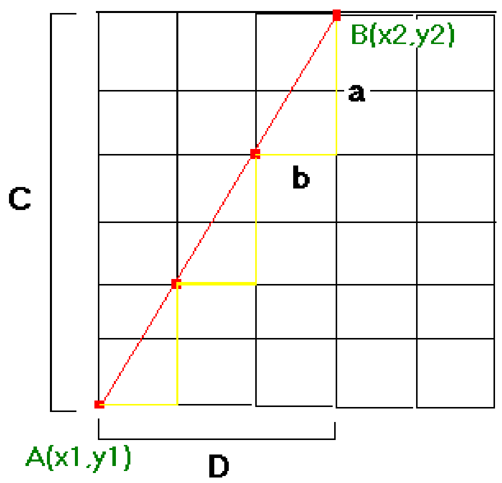
Стандартна функция за пресмятане на ъгъл в радиани:

atan2(y_1-y_0, x_1-x_0)

III. Намиране на точки с целочислени координати, лежащи върху отсечка

Дадена е отсечката AB, където A и B имат съответно целочислени координати
$A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Да разгледаме правоъгълните триъгълници, които се получават като спуснем перпендикуляри от точка B към двете координатни оси и ги пресечем с правите, които са успоредни на координатните оси и точката A лежи на тях. Нека с C и D да означим дължините на катетите на получения триъгълник:

$$D=|x_1-x_2|, \text{ а } C=|y_1-y_2|.$$



От всеки две съседни точки с цели координати можем да построим еднакви помежду си триъгълници със страни a и b. Забелязваме, че броят на търсените от нас точки е с една повече от броя на тези триъгълници. Ако означим броя на триъгълниците с Br, то

$$C = Br * a \text{ и } D = Br * b.$$

От двете равенства изразяваме Br:

$$Br = C/a = D/b, \text{ т.е. } Br = НОД(C, D).$$

Оттук следва, че броят на точките с цели координати върху отсечка с координати (x_1,y_1) и (x_2,y_2) е равен на НОД(|x1-x2|, |y1-y2|) + 1.

Задача: Точки по страните на триъгълник

В равнината са дадени три точки A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) и C (x_3, y_3), които не лежат на една права.

Напишете програма **`point3`**, която намира броя на точките с целочислени координати, лежащи на страните на триъгълника *ABC*.

Данните се въвеждат от стандартния вход: шест цели числа x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, записани на един ред и разделени с интервали. Търсеният брой се извежда на стандартния изход.

Ограничения: координатите на точките са цели числа от интервала [–10000, 10000].

IV. Намиране на точки с целочислени координати, лежащи в четириъгълник

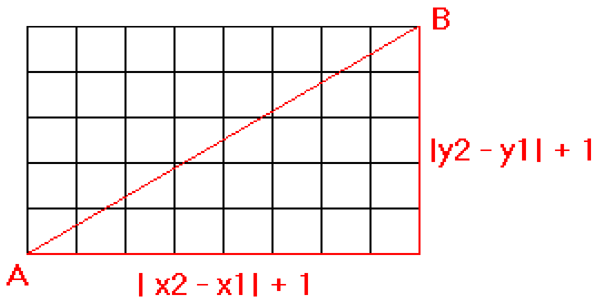
Задача: В равнината са дадени четири точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ и $D(x_4, y_4)$. Напишете програма **`points`**, която намира броя на точките с целочислени координати, които принадлежат на вътрешността или контура на четириъгълника *ABCD*.

От стандартния вход се въвеждат осем цели числа x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, записани на един ред и разделени с по един интервал. На стандартния изход се извежда търсеният брой.

Ограничения: координатите x_i и y_i са цели числа от интервала $[-10^6, 10^6]$, като $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1 < x_4 < x_3$, $y_2 < y_3 < y_4$ и $y_2 < y_1 < y_4$.

Решение:

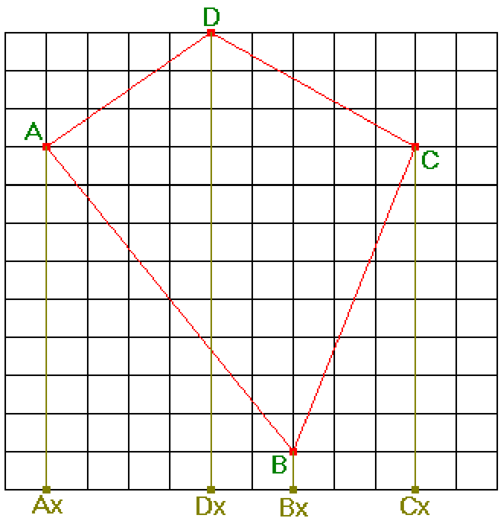
1. Разглеждаме частния случай: да се намери броят на точките с целочислени координати в правоъгълник и правоъгълен триъгълник.



От чертежа се вижда, че когато търсим точките в правоъгълник решението е тривиално – ако правоъгълникът е определен от диагоналните си точки с координати $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$, то $Br = (|x_2-x_1|+1)*(|y_2-y_1|+1)$, защото на всеки $|y_2-y_1|+1$ реда има по $|x_2-x_1|+1$ колони, т.е. точки с цели координати.

За правоъгълния триъгълник броят на търсените точки е половината от тези на правоъгълник със страни катетите на триъгълника + половината от точките по хипотенузата, явяваща се диагонал на правоъгълника (при делението половината точки по нея се губят и трябва да бъдат прибавени допълнително). По този начин получаваме, че броят на точките с целочислени координати в правоъгълен триъгълник се пресмята по формулата:

$$Br = (|x_2-x_1|+1)*(|y_2-y_1|+1)/2+ (НОД(|y_2-y_1|,|x_2-x_1|) + 1) /2$$



2. Да разгледаме четириъгълника ABCD. Нека с Ax, Bx, Cx и Dx да означим петите на перпендикулярите, спуснати от съответните върхове към абсцисната ос. Разглеждаме получените трапеци AxDxDA, DxCxCD, AxABBx и BxBCCx, за които знаем как да пресметнем търсения брой. Така броят на точките с целочислени координати, лежащи в произволен четириъгълник се пресмята по формулата:

$$Br(AxDxDA) + Br(DxCxCD) - (Br(AxABBx) + Br(BxBCCx) – Br(AB) – Br(BC)) - y_4 + x_2$$

($-y_4 + x_2$,защото при извършването на действията съответните страни се прибавят/изваждат по 2 пъти).

Нека означим с “a” бр. точки в AxABBx, с “b” бр.точки в BxBCCx, с “c” в DxCxCD и с “d” в AxDxDA. Представяме тези трапеци като правоъгълен триъгълник долепен до правоъгълник.

Така получаваме че:

$a = (|x_2-x_1|+1)*(|y_2-y_1|+1)/2+ (НОД(|y_2-y_1|,|x_2-x_1|) + 1)/2 + (|x_2-x_1|+1)*y_2$

(точките на правоъгълника са толкова, защото при събиране със тези от триъгълника се повтаря отсечка с дължина $|x_2-x_1|+1$,затова умножаваме само по y_2, а не по y_2+1)

$b = (|x_3-x_2|+1)*(|y_3-y_2|+1)/2+ (НОД(|y_3-y_2|,|x_3-x_2|) + 1)/2 + (|x_3-x_2|+1)*y_2$

$c = (|x_3-x_4|+1)*(|y_4-y_3|+1)/2+ (НОД(|y_4-y_3|,|x_3-x_4|) + 1)/2 + (|x_3-x_4|+1)*y_3$

$d = (|x_4-x_1|+1)*(|y_4-y_1|+1)/2+ (НОД(|y_4-y_1|,|x_4-x_1|) + 1)/2 + (|x_4-x_1|+1)*y_1$

- ⇨ $Br(ABCD) = c + d – (a + b - Br(AB) - Br(BC)) –y_4 + y_2$
- ⇨ $Br(ABCD) = c + d – (a + b - (НОД(|y_2-y_1|,|x_2-x_1|) + 1) - (НОД(|y_2-y_3|,|x_2-x_3|) + 1)) – y_4 + y$

Перпендикулярност на 2 прави

Нека са дадени прави h и g, уравнението на първата права и точка N с координати (x,y)

A1x + B1y + C1=0 - уравнението на g

За да може h да е перпендикулярна на g и да минава през точка N:

Уравнението на h: трябва да е: h=B1x-A1y+C2, където C2=-B1x+A1y. В този израз x и y са координатите на N.

.

Координати на пресечна точка на 2 прави

Нека са дадени правите f и g с техните уравнения $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$.Тогава координатите на пресечната точка са (само ако не са успоредни една с друга и ако не съвпадат)

```
 x =(d1/d)
 y=(d2/d), където

d = |a1 b1|      d1 = |-c1 b1|    d2 = |a1 -c1|
    |a2 b2|           |-c2 b2|         |a2 -c2|
```

Разстояние от точка до права

Нека имаме правата $f:\ Ax+By+C=0$ и точка *T* с координати $(x_0,\ y_0)$ тогава ориентираното растояние *D* от точката до правата е:

$$D=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Реалното разстояние е |*D*|. Забележете, че *D* е положително за всички точки в едната полуравнина и отрицателно в другата. За точките по самата права, то е 0.

Координатите на медицентър на триъгълник

Нека имаме точките, които са върхове на триъгълника (A(xa,ya),B(xb,yb),C(xc,yc)), тогава координатите на медицентъра G са:

```
xG=(xa+xb+xc)/3
yG=(ya+yb+yc)/3
```

Ъгъл между две прави

Нека имаме правите $f:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ и $g:\ A_2x+B_2y+C_2=0$.

Косинусът на ъгъла *t* между двете прави е:

$$\cos t=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2}\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2}}$$

Задачи:

От другия файл.