АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ТАБЛИЦА

Първи начин:

Означаваме с x_n броя на начините, по които в таблица с 2 реда и n колони могат да се изберат една или повече клетки, така че между избраните клетки да няма съседни.

Означаваме с y_n броя на начините, по които в таблица с 2 реда и n колони могат да се изберат една или повече клетки, така че между избраните клетки да няма съседни и клетката, означена със * да е празна.

		…		*
		…		

Означаваме с z_n броя на начините, по които в таблица с 2 реда и n колони могат да се изберат една или повече клетки, така че между избраните клетки да няма съседни и клетката, означена със * да е празна.

		…		
		…		*

Ясно е, че $y_n = z_n$.

Ще изведем рекурентна формула за x_n. За x_n, y_n и z_n са верни следните връзки: $x_n = x_{n-1} + y_{n-1} + 1 + z_{n-1} + 1$, $y_n = x_{n-1} + z_{n-1} + 1$.

От тези зависимости получаваме $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} + 2$, откъдето следва линейната рекурентна зависимост $x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2} - x_{n-3}$. Освен това лесно се съобразява, че $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ и $x_3 = 16$.

В тази зависимост x_n се изразява с помощта на предходните три члена на редицата.

Втори начин:

Означаваме с u_n броя на начините, по които в таблица с 2 реда и n колони могат да се изберат 0 или повече клетки, така че между избраните клетки да няма съседни.

Означаваме с v_n броя на начините, по които в таблица с 2 реда и n колони могат да се изберат 0 или повече клетки, така че между избраните клетки да няма съседни и клетката, означена със * да е празна.

		…		*
		…		

Означаваме с t_n броя на начините, по които в таблица с 2 реда и n колони могат да се изберат 0 или повече клетки, така че между избраните клетки да няма съседни и клетката, означена със * да е празна.

		…		
		…		*

Лесно се съобразява, че $x_n = t_n - 1$. Като се използват разсъждения, аналогични на описаните по-горе може да се получи следната линейна рекурентна зависимост за $t_n : t_n = 2t_{n-1} + t_{n-2}$, в която за изразяването на t_n се използват два предходни члена на редицата, а не 3.

След намиране на линейна рекурентна зависимост за x_n остава да реализираме пресмятането. Ще покажем как може да стане това за първата зависимост, която изведохме. Ще опишем нещата в общия случай.

Да разгледаме следната линейна рекурентна зависимост:

$$x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$$

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta x_{n-2} + \gamma x_{n-3} \text{ при } n \geq 4.$$

Нека $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тъй като

$$A.\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_{n-1} + \beta x_{n-2} + \gamma x_{n-3} \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix} = A^2.\begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \\ x_{n-4} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n-3}.\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = A^{n-3}.\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

От последното равенство се вижда, че за намиране на x_n не е нужно намирането на всички членове на редицата преди него. За повдигане на матрицата A на съответната степен може да се използва алгоритъма за бързо повдигане на матрица на степен, който е подобен на алгоритъма за бързо повдигане на число на степен. Така сложността на окончателната програма става $O(\log n)$. За конкретната задача всички пресмятания трябва да се направят по модул 12345678.

Ако се използва втория начин на решение, нещата изглеждат аналогично. Тогава рекурентната зависимост е от вида:

$$t_1 = a, t_2 = b,$$

$$t_n = \alpha t_{n-1} + \beta t_{n-2} \text{ при } n \geq 3$$

В този случай $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} t_n \\ t_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-2}.\begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} = A^{n-2}.\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$.

Автор: Младен Манев