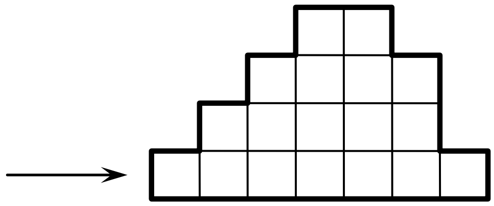
АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА СТЕКОВО ПОЛИМИНО

Означаваме с x_n броя на различните *стекови полимина* с периметър $2n$.

Да разгледаме броя на различните *стекови полимина* с периметър $2n$ и височина поне 2. Ще ги преброим по два начина. От една страна техният брой е $x_n - 1$ (изваждаме 1 заради *дългото полимино* с периметър $2n$, защото то има височина 1). От друга страна може да считаме, че такова полимино е получено от по-малко *стеково полимино* чрез добавяне на едно *дълго полимино* отдолу.



Ако *дългото полимино* има основа, равна на основата на *стековото полимино*, към което го прибавяме, периметъра на *стековото полимино* ще се увеличи с 2, т. е. началното *стеково полимино* е с периметър $2n-2$. При това добавянето на *дългото полимино* може да стане по единствен начин.

Ако *дългото полимино* има основа, която е с 1 по-голяма от основата на *стековото полимино*, към което го прибавяме, периметъра на *стековото полимино* ще се увеличи с 4, т. е. началното *стеково полимино* е с периметър $2n-4$. При това добавянето на *дългото полимино* може да стане по два начина.

По-общо, ако *дългото полимино* има основа, която е с i по-голяма от основата на *стековото полимино* ($0 \le i \le n-3$), към което го прибавяме, периметъра на *стековото полимино* ще се увеличи с $2i+2$, т. е. началното *стеково полимино* е с периметър $2n-2i-2$. При това добавянето на *дългото полимино* може да стане по $i+1$ начина.

От направените разсъждения следва, че:

$$x_n - 1 = 1.x_{n-1} + 2.x_{n-2} + 3.x_{n-3} + \ldots + (n-2)x_2,$$

откъдето получаваме

$$x_n = x_{n-1} + 2.x_{n-2} + 3.x_{n-3} + \ldots + (n-2)x_2 + 1.$$

Последното равенство може да се запише по следния начин:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + \ldots + x_2 + \underbrace{x_{n-2} + 2.x_{n-3} + \ldots + (n-3)x_2 + 1}_{x_{n-1}} =$$

$$2x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + \ldots + x_2.$$

След изваждане на равенствата

$$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + \ldots + x_2 \quad \text{и}$$

$$x_{n-1} = 2x_{n-2} + x_{n-3} + x_{n-4} + \ldots + x_2$$

окончателно получаваме следната линейна рекурентна зависимост:

$$x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2}.$$

Лесно се съобразява, че $x_2 = 1$ и $x_3 = 2$.

За намиране на x_n със сложност $O(\log n)$ ще използваме следната идея, която ще развием в по-общ случай:
Да разгледаме следната линейна рекурентна зависимост:
$x_2 = a, x_3 = b,$
$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta x_{n-2}$ при $n \geq 4$
Нека $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Тъй като
$A.\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_{n-1} + \beta x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$, то
$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = A^2.\begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix} = A^3.\begin{pmatrix} x_{n-3} \\ x_{n-4} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n-3}.\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{n-3}.\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$
От последното равенство се вижда, че за намиране на x_n не е нужно намирането на всички членове на редицата преди него. За повдигане на матрицата A на съответната степен може да се използва алгоритъма за бързо повдигане на матрица на степен, който е подобен на алгоритъма за бързо повдигане на число на степен. За конкретната задача всички пресмятания трябва да се направят по модул 12345678.

Забележка: Нека $f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, \ldots$ е редицата на Фибоначи. Може да се докаже, че $x_n = f_{2n-4}$.

Автор: Младен Манев