КОМБИНАТОРНИ КОНФИГУРАЦИИ. ПРЕСМЯТАНЕ ПО ФОРМУЛА

1. (Изброителна) комбинаторика

По зададено множество от елементи и правила за комбиниране на тези елементи да се намери броя на получените конфигурации

2. Множества

а) множество - съвкупност от елементи, които не се повтарят

Ако има нужда от повторения на елементите в едно множество, казваме, че това е мултимножество.

б) видове множества

крайни D = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

безкрайни N = {1, 2, 3, 4, …}

празно множество E = { } (няма елементи}

Ще разглеждаме крайни множества.

в) основни операции с множества (две множества)

принадлежност – е или не е елемент на множеството

обединение – елементи, които принадлежат поне на едното множество

сечение – общите елементи за двете множества

разлика – елементите от първото множество, които не са във второто

Гореописаните операции могат да се приложат и за повече от две множества

г) реализация на множества, с използване на език за програмиране

побитови вектори (масиви)   C/C++

пример

множества:

A = {1, 3, 5}

B = {2, 3, 6}

Представяне

Множеството A ще представим чрез масив a

За удобство можем да го дефинираме като константен
int a = {0, 1, 0, 1, 0, 1, 0} – има единици на тези места в масива, където индекса е елемент на множеството
Представянето на множеството В ще направим с масива b
int b = {0, 0, 1, 1, 0, 0 1}

Обърнете внимание, че можете за удобств да съхранявате два масива с дължина, равна на максималното по дължина множество.
Обединението на двете множества е проверка къде, на кое място в масива има единици и то поне една единица.
Сечението на двете множества е проверка къде, на кое място в масива има единици представянията и на двете множества.

Предложете вариант на реализацията на разлика на множество.

Как ще реализирате изтриване на елемент от множество?

клас <set>, <multiset> C++ (STL)

задача 1 – SETS1
Да се реализират основните операции над множество чрез описание на функции и използването на побитови вектори.

Задача 2
Експериментирайте и предложете вариант за представяне на множества, които са от цели числа. (могат да са и отрицателни)

3. Комбинаторни принципи

2.1. Принцип на събирането

Пример 2.1.1.
Имате 7 филма – 2, записани на CD и 5, записани на DVD
Колко възможности за избор на флм за гледане имате?

Решение:
Възможностите, записани на един вид носител + възможностите, записани на друг вид носител
2 +5

2.2. Принцип на умножението

Пример 2.2.1.
По колко начина можем да наредим на поставка за дискове само 3 от общо 6 DVDта?

Решение:
Използваме принципа на умножението, защото от избора на едно DVD зависи избора на следващите.

6 възможности за избор на DVD за първо място	5 от 5 останали възможности за второ DVD можем да изберем DVD по 5 начина	4 останалите възможности за трето DVD

Общо 6.5.4 = 120 начина

Пример 2.2.2.
Пет коня и три понита са подготвени за надбягвания. По колко начина могат да бъдат подредени на старта в редица 3 коня и 2 понита?

Решение
(броят на подрежданията на коня) x (броят на подрежданията на понитата)

(5.4.3) x (3.2) = 720

Пример 2.2.3.
Колко са 6 цифрените телефонни номера (записани с цифрите от 0 до 9)?

Решение
Броят на тези номера са: 9.9.8.7.6.5

2.3. Принцип на включването и изключването
Пример 2. 3.1.
На занятието дадохме примера колко са ръководителите на занятието, ако използваме множеството от ръководители на ученици и множеството от лектори.

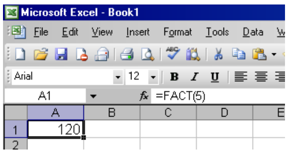
2.4. Принцип на Дирихле (на чекмеджетата)

4. Комбинаторни конфигурации

множество - правило за комбиниране
- с/без наредба
- с/без повторения

а) **пермутации** – конфигурации, с наредба и без повторение
N елемента
N.(N-1).(N-2)… 2.1 = N!

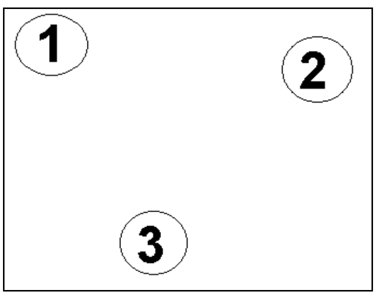
Заб. 1
За проверка на резултата за N! Можете да използвате функция на Excel



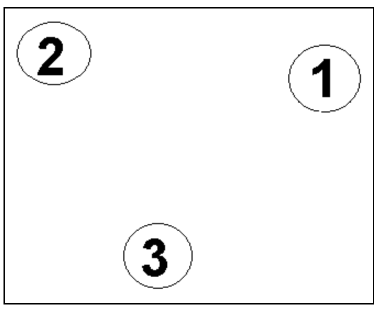
пермутации, с ограничения
на опеделено място да стои тчно еди какво си

Пример 4.1
определете броя на пермутациите на n елемента, наредени в кръг

Решение
Броят на тези пермутации е 3. Можем лесно да ги получим, когато фиксираме единия елемент и намерим пермутациите от останалите. За N=3 броят е 2.



Фиг. 1



фиг 2

Ако допуснем, че можем да разменим 1 и 3 и да се надяваме да получим други разместования ще разберем, че сме дублирали някое разместване.

Пример
За горните разположения получаваме
От фиг 1
1 2 3
2 3 1
3 1 2
От фиг 2
2 1 3
1 3 2
3 2 1

А сега да разместим 1 и 3
Ще получим
3 2 1 – вече го имаме
2 1 3 – вече го имаме
1 3 2 – вече го имаме

б) **вариации** – – комбинаторна конфигурация от K елемента от N с наредба, без повторение (K-елемента пермутация от N елемента)
N елемента
N.(N-1)….(N-K+1) = N! / (N-K)!

в) **комбинации** – комбинаторна конфигурация от K елемента от N без наредба, без повторение

N!/(N-K)! = бр. начина да вземем K елемента . пермутациите на K елем
N!/(N-K)! = C(N,K) .K!

C(N, K) = N! / (K!. (N-K)!

Какъв е броят на подмножествата на дадено множество с определена дължина?

Пример
A = {1, 2, 3, 4, 5}
Ще искаме да намерим всички 3 елементни подмножества на A.
Това са:

{1, 2, 3}
{1, 2, 4}
{1, 2, 5}
{1, 3, 4}
{1, 3, 5}
{1, 4, 5}
{2, 3, 4}
{2, 3, 5}
{2, 4, 5}
{3, 4, 5}

Те са общо 10.

Колко са всички подмножества на дадено множество от N елемента.

Пример за множество с три елемента

C = {1, 2, 3}
Всички подмнжества са:
Празното множество { }
Подмножества с един елемент {1}; {2}; {3}
Подмножества с два елемента {1, 2}; {1, 3}; {2, 3}
Подмножества с три елемента {1, 2, 3}

Общо $8 = 2^3$
За множество от N елемента е бъдат 2^N

5. Триъгълник на Паскал

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Всеки елемент в него се получава чрез събиране на горните два

За какво може да ни служи триъгълник на Паскал?

1. Забележете, че броят на подмножествата с определена дължина в примера по-горе за N=3 се намират на ред 4 във въпросния тригълник.
2. Ако вече знаете да пресмятате $(x+y)^2 = 1.x^2 + 2xy + 1.y^2$ ще намерите коефициените на ред 3. Ако не знаете коефициентите при повдигане на трета степен ще ги намерите съответно на ред 4.

$(x+y)^3 = 1.x^3 + 3.x^2y + 3.xy^2 + 1.y^3$

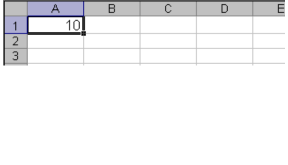
3. Броя на К елементните подмножества от N елемента или комбинацията на К елемента от N е число от триъгълника на Паскал.

Пресмятане на числата от триъгълника на Паскал
Подравняват се елементите в ляво и се получава:
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
Могат да се пресметнат елементите чрез използване на двумерен масив за съхраняване на елементите му NxK или с използване на двумерен масив 2xN. Последното е по-ефективно от гледна точка на памет.
Кое е N, кое е К в таблицата горе?
N е реда, К е колоната и двете започват от 0.

Задача 3 - CNK
За дадени N и К пресметнете C(N, K), с използване на триъгълника на Паскал и масив 2xN.

Заб. 1
На който горното му е лесно да си напише решение с масив 1xN.

Заб. 2
За проверка на получения резултат можете да използвате и функция на Excel.



6. Комбинаторни числа

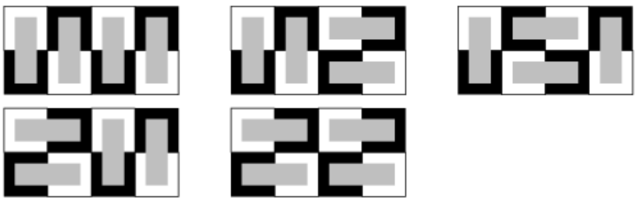
а) числа на Фибоначи

По-странен пример 1

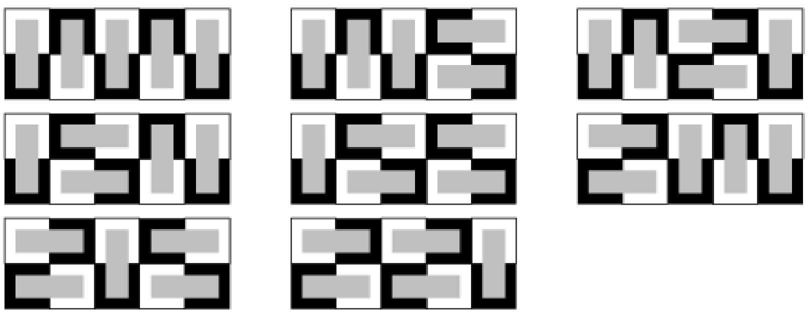
Дадена е шахматна дъска, с размери 2xN. Да се пресметнат колко начина има да се покрие дъската с плочки с домино.

2X3

2x4



2x5



Как открихме, че решението на задачата е точно тази редица? Пресметнахме стойностите за първите няколко N и анализирахме получените стойности.

б) биномни коефициенти

По-странен пример 2

Типични задачи са тези, изискващи обхождане на дъска с размери mxn с придвижване в две посоки. Например ако тръгнем от долен ляв ъгъл на дъската, движим се надясно и нагоре и искаме да стигнем до горен десен ъгъл.

Конкретни задачи – виж състезателни задачи от последните години

Задача 4 - **SS_BR**

Да се напише програма, която извежда всички подмножества на дадено множество 1, …, N чрез преобразуване в двоична бройна система на числата от 0 до $2^N - 1$ и представяне на множеството с побитови вектори

Пример

Вход

3

Изход	Обяснение на изхода
{} {3} {2} {2, 3} {1} {1, 3} {1, 2} {1, 2, 3}	$000_{(2)} = 0_{(10)}$ $001_{(2)} = 1_{(10)}$ $010_{(2)} = 2_{(10)}$ $011_{(2)} = 3_{(10)}$ $100_{(2)} = 4_{(10)}$ $101_{(2)} = 5_{(10)}$ $110_{(2)} = 6_{(10)}$ $111_{(2)} = 7_{(10)}$

Задача 5 - **SS_plus1**

Да се напише програма, която извежда всички подмножества на дадено множество, получени от предходното (представяне), с добавяне на 1в двоична бройна система към най-десния разряд и представяне на множеството с побитови вектори.

Вход

3

Изход	Обяснения
{} {3} {2} {2, 3} {1} {1, 3} {1, 2} {1, 2, 3}	0 0 0 +1 0 0 1 +1 става последния разряд 0 и единица пренос наляво 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 Ха, то като горното – ами нали прибавяме 1 ☺, макар и в двоична бройна система

Очаквам вашите решения на задачите с номера 1.-5. на адрес gmomcheva@gmail.com в периода от 1 до 5 ноември 2008 г.
Сорсове, please ☺

Други учебни материали по комбинарторика (за вас и по-големите от вас) ще публикувам на личния си сайт през декември 2008
www.momcheva.net