АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ПЛОСЪК ГРАФ

Ограничението $E \leq 2*F$, което води и до ограничение на броя на върховете е доста съществено (то по никакъв начин не следва от формулите за планарен граф, дадени в условието).

Подзадача 1

Изчерпване на всички стойности на ребрата. Имеме графи с максимум 6 лица и 12 ребра. За всяко ребро имаме 7 стойности. Всеки граф може да бъде проверен дали води до решение. Има много начини за „рязане“, така че изчерпването да мине във всички случаи.

Подзадача 2

Задачата може да бъде сведена до система линейни уравнения. За всяко ребро имаме по една променлива. Всяко лице от входа ни дава едно уравнение. В случая, когато M е просто, всяко число има обратен елемент по модул M, така че можем да делим по модул M. Това ни позволява да правим Гаусова елиминация по модул M със сложност $O(F \wedge 3)$.
Примерът от условието се превръща в система:
x12 + x23 + x13 = 2
x12 + x24 + x14 = 1
където xAB е променливата, чиято стойност ще присвоим на реброто AB

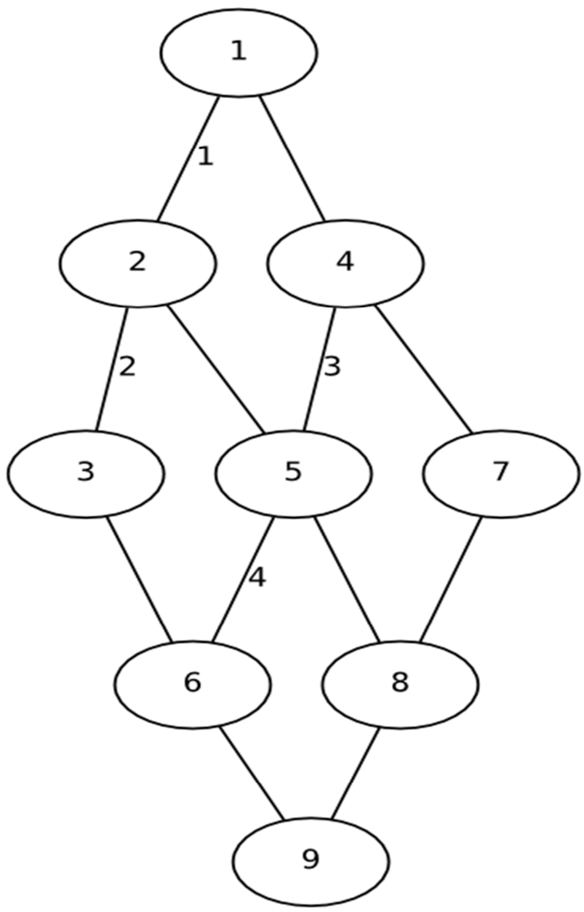
Подзадача 3

Да разгледаме структурата на системата уравнения от Подзадача 2 по-добре. Тъй като работим върху граф, всяко ребро участва в най-много 2 лица. Тоест, първоначално всяка променлива участва в 1 или 2 уравнения. Да разгледаме алгоритъма за Гаусова елиминация: Първо намираме уравнение (*), където първата променлива има ненулев коефициент. След това, използвайки това уравнение, премахваме всички останали срещания на тази променлива (най-много 1 друго уравнение). След премахването на тази променлива, забравяме за момента за уравнение (*) и продължаваме алгоритъма за следващите променливи. В променената система без уравнение (*), всяка променлива се среща в най-много 2 уравнения. Това ни позволява да правим Гаусова елиминация със сложност $O(F \wedge 2)$.

Забележете, че всички първоначални коефициенти са 1. Това ни гарантира, че като правим Гаусова елиминация, всички коефициенти в системата ще бъдат -2, -1, 0, 1 или 2 (по модул M). Когато M е нечетно число, +/- 2 и +/- 1 имат обратен елемент. Това ни позволява да правим Гаусова елиминация в Подзадача 3.

Подзадача 4

Нека имаме само едно лице със сума S и досега сме сложили стойности U_1, U_2, …, U_{K-1} на всички ребра без едно. Тогава все още можем да решим задачата, независимо от стойностите Ui, като сложим $U_K = S - U_1 - U_2 - \dots U_{K-1}$.
Нека започнем да премахваме ребра от първоначалния граф. На всяка стъпка трябва да премахнем ребро, което принадлежи на външното лице (в първоначалния граф, това са ребра които участват в само едно вътрешно лице). Всяко премахнато ребро или премахва точно едно вътрешно лице от графа, или не премахва нито едно вътрешно лице. Спираме алгоритъма, когато всички лица са били премахнати - тоест останем с ацикличен граф.
Ще присвояваме стойности на ребрата в обратен ред на гореописания ред на премахване на ребрата. Да си представим, че връщаме ребрата към графа - всяко ребро или ще върне точно едно от първоначалните лица (в този случай, няма да добавим повече ребра към това лице), или нито едно. Ако не завършваме първоначално лице с добавянето на текущото ребро, тогава слагаме стойност 0 на това ребро. Ако затваряме лице, знаем точно каква стойност трябва да присвоим на реброто, така че сумата на това лице да е удовлетворена. Тъй като всяко ребро с фиксирана стойност повлиява на най-много едно лице в момента на слагане, винаги ще имаме решение.
Примерна картинка за реда на премахване на ребра в граф. Добавяме ги обратно в ред (4), (3), (2), (1).



Автор: Йордан Чапъров