

АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ПЛАНИНИ

Общо наблюдение:

Можем да разделим двойките клинове (i, j) на такива, за които $i < j$ и такива, за които $j < i$. Първите съответстват на хвърляне на въже от ляво надясно, а вторите -- от дясно наляво. Така можем да сведем задачата до решаване на две симетрични задачи. Ще опишем намирането само на броя на двойките, за които $i < j$. Намирането на останалите двойки ($j < i$) намираме напълно аналогично.

Решение, $O(N^2)$:

За всеки клин i се обхождат и последователно се преброяват десните му съседни клинове j , преди да се достигне клин с височина, равна на тази на i . По-десните клинове са недостижими по условие на задачата и не трябва да бъдат преброявани.

Решение, $O(N)$:

Ако можехме бързо да разбираме от колко клина i можем да хвърлим въже до j ($i < j$), то отговорът бихме могли да получим като сума на тези броеве за всички клинове j . Да обходим всички клинове от ляво надясно. Стигайки до клин j , ще поддържаме структура от данни, пазеща по един елемент за всеки клин i ($i < j$), от който е възможно да хвърлим въже към текущия клин j .

В началото на алгоритъма, структурата ни е празна. А разглеждането на всеки следващ по-десен клин j включва следните стъпки:

- (1) премахване от структурата на клиновете, отдалечени от j на разстояние, повече от L ;
- (2) преброяване на клиновете i ($i < j$), от които е възможно хвърлянето на въже към клина j (т.е. прибавяме към крайния резултат броя на елементите, намиращи се в структурата в текущия момент);
 - (3.1) в случай, че от j следва склон надолу: добавяме клина j към структурата;
 - (3.2) иначе (ако от j следва склон нагоре): премахваме от структурата клиновете, намиращи се по-ниско от j .

Благодарение на стъпка (1), никога не броим двойки клинове (i, j) на разстояние, по-голямо от L . Стъпка (3.1) гарантира, че в структурата сме не сме пропуснали да добавим по-ляв клин, освен ако след него не следва склон нагоре, в който случай не може да бъде хвърлено въже нагоре. Стъпка (3.2) гарантира, че достигайки до определен клин j , в структурата няма да присъстват клинове i , разделени от j от поне толкова високи точки на планината между тях. От тук следва и че от ляво надясно клиновете в структурата са със намаляващи височини.

В стъпка (1) премахваме определен брой клинове от най-левите – за да определим колко клина да премахнем, ще са ни нужни само хоризонталните координати на добавените клинове (ако разстоянието от текущия клин до някой клин в структурата е повече от L , то и разстоянието до левите от него клинове е повече от L). В стъпка (3.1) добавяме клин, по-десен от вече добавените. В стъпката (3.2) премахваме най-много един клин от структурата – най-десния, ако той не е по-висок от следващия клин в обхождането (по-леви клинове не премахваме, понеже гарантирано всички от тях са още по-високи, а следващия клин може да е само с единица по-висок от текущия).

Както видяхме в предния абзац, необходима ни е линейна структура, поддържаща операциите „Добавяна в началото“, „Добавяне в края“ и „Изтриване от края“. Идеално подхожда структурата „Дек“, над която всяка от тези операции се изпълняват за константно време. При обхождане на клиновете от ляво надясно, всеки клин бива добавен не повече от веднъж и изтрит не повече от веднъж, т.е. времето за работа е пропорционално на броя на клиновете N . Преминаването на клиновете от дясно наляво изисква също пропорционално на N време, което не повишава сложността на решението.

Автор: Петър Иванов