Shades
(решение)

Задачата Shades беше пример за задача, която не изисква сложни алгоритми, а по-скоро досетливост и няколко наблюдения. Най-сложният алгоритъм, който авторското решение ползва, е BFS. По тази причина първоначално беше планирана за Б група, но в последствие реших, че е далеч по-удачна за А. Въпреки липсата на сложни алгоритми, решението за 100 точки далеч не е тривиално.

Първото нещо, което състезателите трябваше да направят, беше сравнително простото наблюдение, че ако пътят е с нечетна дължина, то той няма как да е с равен брой бели и черни клетки – съответно отговорът за такива query-та винаги би бил -1. А кога пътят е с нечетна дължина? Ами ако четността на сумата (SR + SC) е равна на четността на сумата (ER + EC). Наистина, представете си най-простия случай, в който началната и крайната клетка съвпадат (тогава и четностите съвпадат). Тъй като можем да се движим само в някоя от съседните 4 клетки, както и да се движим, връщайки се в началната клетка сме посетили нечетен брой клетки. В остатъка от решението ще считаме, че сме в другия случай – когато клетките са с различна четност (тоест всички пътища между тях са с четна дължина).

Най-простото, което състезателите можеше да направят, е да напишат бектрек за малките тестове. Това би им осигурило около 25 точки.

Следващото решение беше чрез BFS, прилагайки техниката "разширяване на графа". В него, освен текущия ред и колона, трябва да пазим и колко бели и черни клетки вече сме посетили. По-специално ни интересува каква е разликата между белите и черните клетки (отрицателна, ако белите са повече, положителна, ако черните са повече, или 0, ако са по равно). Разбира се, за да се съхранява това в масив, тези числа трябва да се offset-нат с максималната допустима разлика между брой бели и черни клетки.

Тук идва въпросът – колко може да е максималната разлика между бели и черни клетки, в път, който започва от началната клетка, завършва в крайната и има равен брой черни и бели клетки?

Един очевиден отговор беше около N * M – наистина, ако обиколим цялата дъска ще сме посетили около N * M клетки. С това решение (пазейки стейт (N)(M)(N * M * 2)) бихме могли да хванем и втория сет тестове – тези с размери на дъската до 25. Това решение е със сложност O(N^2 * M^2) както по време, така и по памет и би хванало около 50 точки.

С малко мислене можем да видим, че това е сравнително разхитително. Разстоянието между които и да е две клетки на дъската е най-много N + M – защо тогава да гледаме разлики в броя черни и бели клетки повече от толкова? Наистина – ако има път с равен брой бели и черни клетки, то ще има такъв път, в който по всяко време броят на белите клетки не надвишава броя на черните клетки с повече от N + M, и обратно – по всяко време броят на черните клетки не надвишава броя на белите клетки с повече от N + M.
Така можем да оптимизираме BFS-то и да пазим стейт (N)(M)((N + M) * 2), като постигаме сложност O(N * M * (N + M)) по време и по памет. Така и хващаме

мнозинството от точките – около 75, а даже може би малко повече, при малко по-добра имплементация.

Решението за 100 точки изискваше съвсем друга стратегия. За състезателите, които са го намерили – браво! Може би трябваше да дам повече точки (разликата между 75-80 точки и 100 точки не е твърде голяма) за тези, които все пак успеят да измислят това, но все пак... Ако сте, може да се чувствате морални победители =)

Идеята е следната – ако има две бели клетки една до друга, а също така и две черни клетки една до друга, можем да намерим път, който отива от началната до черните, стъпва на тях няколко пъти, после отива до белите, стъпва на тях няколко пъти, и накрая отива до крайната. Ако накрая броят посетени бели клетки е различен на броя посетени черни клетки, можем да модифицираме пътя (с потенциално повече стъпване върху двете съседни бели или двете съседни черни) така, че накрая броят бели и черни да е равен.

Защо ни трябват да са съседни? Ако, да кажем, на дъската няма две съседни бели клетки, то няма такова "поле", където можем да отидем и да увеличаваме броя посетени бели клетки произволно. Наистина, дори да имаме нещо от сорта на "WBW", то ходейки от едната до другата и обратно на практика не правим нищо.

Това е почти цялото решение – с една вртъка. Представете си, че градът е оцветен като шахматна дъска. Така няма две съседни бели клетки, а също така няма и две съседни черни клетки, но *има* път с равен брой черни и бели клетки, при това между *всеки* две клетки (с различна четност).

Оказва се, че такива случаи не са само ако имаме "шахматна дъска". Представете си например следната редица "WBBW" – тук също имаме път от най-лявата до най-дясната. За наше щастие, тези случаи са много специфични – при тях по никое време броят на белите не надвишава броя на черните с повече от 1; и обратно, по никое време броят на черните не надвишава броя на белите с повече от 1. Това е така, тъй като ако имаше момент, в който, например, белите надвишават черните с 2 (или повече), то за да се е получила тази разлика е имало (поне) 2 съседни бели. Нещо повече, ако има отговор, то все някъде трябва да "компенсираме" тези 2 (или повече) – следователно ще имаме (поне) 2 съседни черни – което вече е горния случай, който решихме.

За да се справим с тази "вртъка" трябва да приложим решението за 75 точки (BFS с разширяване на графа), с тази разлика, че тук го разширяваме съвсем малко (разлика най-много 1, следователно стейтът е (N)(M)(3)).

Така това решение е O(N * M) както по време, така и по памет.

Автор: Александър Георгиев