АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
ИГРА

Решение 1.

Математически задачата се свежда до намиране на най-голямото число, по-малко от половината на даденото число *N* и взаимно просто с него. За целта, започвайки от $K=[N/2]$ ($[x]$ означава цялата част на x) и връщайки се назад трябва да се намира най-големият общ делител на числата *N* и *K*, и да се проверява дали е равен на 1. Ако за намиране на НОД(N, K) се използва алгоритъм на Евклид с деление, се получават 100 точки. Ако се използва алгоритъм на Евклид с изваждане – 60 точки. Програмната реализация на това решение с използването на алгоритъм на Евклид с деление е дадена в game.cpp, а с използването на алгоритъм на Евклид с изваждане – в game1.cpp.

Решение 2.

Задачата може да се реши без всякакви специални знания.

1. Нека *N* е нечетно число.

Тогава може да го представим по следния начин $N = 2L+1$. В този случай ограниченията за *K* приемат вида $1 \le K \le L$. Понеже ние търсим максималното число *K*, то да видим какво се случва, когато $K = L$. Трябва да проверим получават ли топката всички девойки. За целта да се опитаме да проследим как ще върви играта. В началото от първото момиче топката ще отиде в момиче с номер $L+1$, а то от своя страна, ще предаде топката на момиче с номер $2L+1$, и така нататък. Разсъждавайки по този начин, получаваме, че топката ще преминава в следния ред:

$1, L+1, 2L+1, L, 2L, L-1, 2L-1, \ldots, 3, L+3, 2, L+2, 1.$

Забелязваме, че сме изредили всички числа от 1 до $2L+1$, затова $K=L$ е решение.

2. Нека *N* е четно число.

Тогава $N = 2L$. Ограничението за *K* е $1 \le K \le L$. Отново да опитаме за $K = L$. За съжаление, нищо хубаво не се получава: от първото момиче топката отива в момиче с номер $L+1$, а то на свой ред я връща на момичето с номер 1. Играта завършва. Топката не е попадала във всички момичета. (т.к. $N \ge 3$).

Започваме да намаляваме K. Сега да пробваме за $K = L-1$.

Ако *N* не се дели на 4, то тази стойност на *K* никак не е подходяща (понеже *L* е нечетно, то *K* е четно, и по тази причина топката получават само момичета с нечетни номера).

Да проверим даденото *K* за *N*, което се дели на 4. Забелязваме, че в този случай *L* е четно. Редът за получаване на топката ще бъде:

$1, L, 2L-1, L-2, 2L-3, \ldots, 4, L+3, 2, L+1, 2L, L-1, 2L-2, L-3, \ldots, L+4, 3, L+2, 1.$

Отново сме изредили всички числа от 1 до $2L$, затова $K = L-1$ е решение.

Остава неразгледана само още една възможност: N се дели на 2, но не се дели на 4. Това означава, че $N = 2L$, където *L* е нечетно. Ние вече се убедихме, че $K = L$ и $K = L-1$ не са решения. Да опитаме $K = L-2$. Ако остатъкът при деление на L на 4 е 1, то редът за получаване на топката ще бъде:

$1, L-1, 2L-3, L-5, 2L-7, \ldots, 4, L+2, 2L, L-2, 2L-4, L-6, 2L-8, \ldots, 3, L+1, 2L-1, L-3, 2L-5, \ldots, 2, L, 2L-2, L-4, 2L-6, \ldots, 5, L+3, 1.$

Ако остатъкът при деление на *L* на 4 е 3, то редът за получаване на топката ще бъде друг:

$1, L-1, 2L-3, L-5, 2L-7, \ldots, 2, L, 2L-2, L-4, 2L-6, \ldots, 3, L+1, 2L-1, L-3, 2L-5, \ldots, 4, L+2, 2L, L-2, 2L-4, L-6, 2L-8, \ldots, 5, L+3, 1.$

Все пак, и в двата случая, всички момичета ще получат топката. Следователно K = L-2 е решение.

Автор: Кинка Кирилова-Лупанова

Решение 3.

Както беше казано в решение 1, задачата се свежда до намирането на най-голямото число, по-малко от половината на даденото число *N* и взаимно просто с него. В решение 2 на практика се оказа, че ако *N* е нечетно, то [*N/2*] е взаимно просто с *N*; ако *N=4*L*, то *N/2-1* е взаимно просто с *N*; ако *N=2*L,* където *L* е нечетно, то*N/2-2* е взаимно просто с *N*. Строго това може да бъде доказано по следния начин:

1. *N=2*L+1* (*N* е нечетно)
   Тогава [*N/2*] = *L*. Тогава никой делител на *L*, по-голям от 1 не може да бъде делител на *N*, тъй като е делител на *2*L* и трябва да бъде делител и на 1, което е невъзможно.
2. *N=4*L*
   Тогава *N/2=2*L* – не е взаимно просто с *N*.
   *N/2-1= 2*L-1* – нечетно число, така че *2* не може да бъде общ делител на N и на *N/2-1*. Всеки прост делител на *N*, различен от 2, трябва да бъде делител на *L*, но тогава той не може да бъде делител на *2*L-1*, тъй като би трябвало да бъде делител на *1*, което е невъзможно. Така че *N* и *N/2-1* са взаимно прости.
3. *N=2*L,* където *L* е нечетно.
   Тогава *N/2=L*– не е взаимно просто с *N*.
   N/2-1=L-1 е четно (да си спомним, че *L* е нечетно) и има общ делител *2* с *N*.
   Да разгледаме *N/2-2=L-2*. Това число е нечетно, така че няма общ делител *2* с *N*. Всеки прост делител на *N*, различен от 2, трябва да бъде делител на *L*, но тогава той не може да бъде делител на *L-2*, тъй като би трябвало да бъде делител на 2, което е невъзможно. Така че *N* и *N/2-2* са взаимно прости.

Програмната реализация при решения 2 и 3 е еднаква и е съвсем проста (естествено тя носи 100 точки). Тя е дадена в game2.cpp

Най-достъпно за децата е решение 1. До решение 2 може да се достигне чрез разсъждения и проби, докато решение 3 е по-скоро за ръководителите, за да покажат на децата ползата от математическото мислене за получаването на кратки и бързи решения на задачи по програмиране.

Автор: Руско Шиков