

# АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА

## АЛЕИ

Ще разглеждаме мултиграф  $G$  без примки. Един цикъл в  $G$  ще наричаме *прост цикъл*, ако не повтаря върхове и/или ребра. Кръгчетата, дефинирани в задачата са всъщност прости цикли на мултиграф.

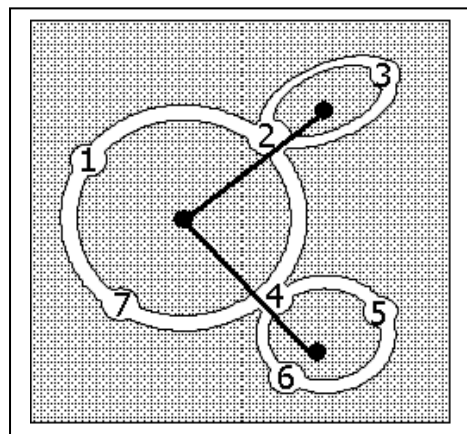
Мултиграфите, за които всяко ребро участва в не повече от един цикъл се наричат *кактуси*. В задачата става дума за специален вид кактуси, всяко ребро на които участва в **точно един прост цикъл**. Такива кактуси ще наричаме *попълнени*.

Очевидно е следното:

**Твърдение 1.** В попълнен кактус всеки връх е от четна степен.

Ако степента на връх  $v$  е  $d(v) = 2$ , през него преминава единствен прост цикъл, а ако  $d(v) > 2$ , тогава  $v$  е допирна точка на  $C$  прости цикъла, където  $C = d(v)/2$ .

Да построим граф с върхове простите цикли на попълнения кактус, като свържем с ребро два върха, чрез следната процедура, модификация на обхождането в ширина (вж. Фигурата). Започваме с някой от върховете като начален. Свързваме чрез ребро с началния връх всички върхове, циклите на които се допират до цикъла на началния връх. На всяка следваща стъпка присъединяваме към графа нов връх по следното правило: ако върхът  $x$  е вече в графа, върхът  $y$  не е, а циклите на  $x$  и  $y$  се допират – свързваме  $x$  и  $y$  с ребро. Полученият граф наричаме *циклов граф* на попълнения кактус.



**Твърдение 2.** Цикловият граф на попълнен кактус  $G$  е дърво, ако  $G$  е свързан или гора от дървета, ако  $G$  не е свързан.

Така всеки връх  $v$  на попълнения кактус, в който се допират  $C$  цикъла добавя  $C - 1 = d(v)/2 - 1$  ребра в цикловия граф. Следователно, броят на ребрата на цикловия граф на попълнен кактус е  $\sum (d(v)/2 - 1)$ , където сумата е по всички върхове на кактуса (не е нужно да отделяме върховете със степен 2, защото за тях  $d(v)/2 - 1 = 0$ ). Търсеният в задачата брой на простите цикли на кактуса, равен на броя на върховете на цикловия му граф, намираме от следното добре известно

**Твърдение 3.** Ако  $T(V,E)$  е гора от  $K$  дървета, то  $|V| = |E| + K$ .

Броят  $|E|$  на ребрата на гората, както вече споменахме е  $\sum (d(v)/2 - 1)$ , а броят на свързаните компоненти можем да намерим с обичайно обхождане на попълнения кактус (в ширина или дълбочина). В случая, когато кактусът е свързан, такова обхождане не се налага, тъй като  $K = 1$ . Следователно  $|V| = \sum (d(v)/2 - 1) + 1$ .

Автор: Красимир Манев