

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ПРАЗНИЦИ – РУСЕ’ 2006

Изход: Програмата трябва да изведе резултатите на стандартния изход, като за всеки въпрос изведе по един ред. Отговорът се състои от две числа **Е Р**, където **Е** (няма да надвишава по абсолютна стойност 10^8) е координатата на мястото на празника, а **Р** е абсолютната стойност на разликата между исканите исканата сума и тази, която ще постъпи в касата от таксите. Ако има повече от един възможен отговор Вашата програма трябва да изведе кой да е от тях.

ПРИМЕР

Вход:	Изход:
2 2	-4 1
3 7	3 4
11 5	
123	
36	

Решение:

Някои константи които ползвам в решението:

maxx = 2^{27} – максималната абсолютна стойност на координатата която може да бъде отговор на някой въпрос (това не означава, че непременно има такъв тест)

maxx = 2^{24} – максималните координати на които може да има къщи (в тестовите това е по-малко)

mx = 2^{17} – броя на листата в дървото ми (трябва да е по голям от максималния брой къщи)

За всеки въпрос ние трябва да намерим оптимална точка от числовата права. Тъй като на всяка точка можем да съпоставим цена (сбора от броя на хората във всяка къща умножен по разстоянието до дадената точка за всички къщи) можем да отговорим на всеки въпрос просто като обходим цялата права и намерим коя точка е оптималната. Но ако разгледаме тази функция то ще видим, че тя е нещо подобно на парабола – т.е. в двата си края функцията приема големи стойности, които намаляват към средата на графиката. Нека първо си отговорим на въпроса “Къде е тази среда на графиката”. Нека сега се намираме в произволна точка **Х** от числовата права и нека стойността на функцията в тази точка е **С**. Да се опитаме да намерим каква ще е стойността на функцията в точка **Х+1**. Всеки човек, който живее в къща с координати $\leq X$ ще трябва да заплати 1 лев повече, но от друга страна всеки, който живее в къща с координати $\geq X+1$ ще трябва да заплати 1 лев по-малко. Следователно стойността на функцията в точка **Х+1** е равна на **С+(броя на хората живеещи преди или на Х) – (броя на хората живеещи след Х)**. И това твърдение е вярно за всяка точка. Нека с **Дх** бележим изменението на стойността на функцията между точки **Х** и **Х+1**. Лесно се вижда, че **Дх > Ду** за **х>у**. Ако за момент си помислим за функцията **Дх** като за производна то лесно ще намерим къде е средата (минимума) на функцията. Там където **Дх** е равно на 0. За съжаление може да няма такава точка (тъй като работим с целочислени стойности), или пък може да има много такива точки. Затова ето къде се намира средата на функцията. Нека къщите са сортирани. Ако съществува къща **К**, такава че **(броя на хората живеещи в къщи 1..К) = (броя на хората живеещи в къщи К+1..N)**, то тогава функцията е минимална в целия затворен интервал **[К, К+1]**, като това са координатите на къщите. Ако пък няма такава къща то тогава съществува къща **К** такава, че **(броя на хората живеещи в къщи 1..К) > (броя на хората живеещи в къщи К+1..N)** и такава къща, че **К** е минимално. Тогава минимума на функцията е в тази точка (координатата на къщата). Нека отсега нататък средата на функцията наричаме

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ПРАЗНИЦИ – РУСЕ' 2006

MIDDLE като това е или произволна точка от този интервал или къща лежаща в този интервал. Трябва да отбележа, че функцията е линейна между всеки две къщи.

Дотук представих две решения:

- 3) Тривиалното – за всяка точка от числовата права смятаме стойността и сравняваме с исканата стойност.
- 4) Смятаме последователно за всички точки като по този начин смятането на стойността на функцията за всяка следваща точка е за константно време.

Сега ще представя третото решение, което използва метода на двоичното търсене за да отговори на всеки въпрос, което прави сложността $O((M+N) \log N)$.

Интерполация

Сега ще покажа алгоритъм за намиране на точка от графиката в даден линеен интервал (такъв между две последователни къщи) при условие, че знаем стойностите на функцията в двата края на интервала. Нека са дадени следните стойности:

C, ans1, ans2, sum1, sum2, a, b

a и **b** са съответно координатите на левата и дясната граница на интервала.

C е стойността, за която търсим координатата където се получава максимално близка стойност.

sum1 е броя на жителите вляво от **a**.

sum2 е броя на жителите вдясно от **b**.

ans1 е стойността на функцията в точка **a**.

ans2 е стойността на функцията в точка **b**.

Нека **x** е търсената координата.

Следното равенство важи за **C**.

$C = ans1 + (x - a) * (sum1 - sum2)$ - това е стойността на функцията в точка **x**.

От тук стигаме до:

$x = (C - ans1 + a * sum1 - a * sum2) / (sum1 - sum2)$.

Тъй като това е целочислено деление реалният отговор за **X** е между **X** и **X+1** и затова трябва да проверим кое от двете е по близко до търсената стойност.

Двоичното търсене

За да правим двоично търсене първо намираме средата на функцията – **MIDDLE**. Нека в случая **MIDDLE** значи една от къщите, където се постига минимума на функцията. Първо правим двоично търсене в интервала **-maxx..MIDDLE**. Намираме такава къща **K** в този интервал, за която стойността на функцията в къща **K** $\geq$ (**търсената стойност**) а в къща **K+1** $<$ (**търсената стойност**). Тогава вече с интерполация може да се намери къде точно между двете къщи се намира оптимума. Двоичното търсене трябва да се пусне и в другия интервал **MIDDLE..maxx**.

ТЕМА ЗА ГРУПА С

Задача C1. МОРЗОВ КОД

В далечната и не особено известна страна, наричана от хората Здравословна Монархия за Програмисти (накратко, ЗМП) е пълно със зимни курорти, позволяващи на вече