

Анализ на задача XY

Първото общо наблюдение е, че ако можем да направим редица с дължина n , то можем да направим и редица с произволна дължина, по-малка от n .

2. $x = y$ (3 точки)

В тази подзадача е достатъчно да забележим, че няма как да се направи редица с дължина x . Обратно, всяка редица с дължина $x-1$ би удовлетворила условията на задачата.

3. x дели y или y дели x (4 точки)

Нека за определеност x дели y . Тогава ако допуснем, че можем да направим редица с дължина y , то сумата на тези y числа трябва да е строго отрицателна. От друга страна x дели y , така че се разделя на няколко групи от по x , всяка със строго положителна сума, т. е. общата сума е отново положителна - противоречие. Ако направим редица от $y-1$ положителни числа например, ще видим, че тя отговаря на условието, следователно най-дългата редица се състои от $y-1$ числа.

Това съображение можем да го разширим и да видим, че най-дългата редица винаги е с дължина по-малка от $x + y - 1$. Ако допуснем, че има редица с такава дължина, разглеждаме сумата на всички подредици от по x последователни елемента и аналогично на всички редици от по y последователни елемента.

$$0 < \sum_{i=0}^{y-1} \sum_{j=0}^{x-1} a_{i+j} = \sum_{i=0}^{x-1} \sum_{j=0}^{y-1} a_{i+j} < 0$$

- Противоречие.

4. $X, Y \leq 5, Q = 1$ (9 точки)

Знаейки максималната дължина на редицата (сравнително малка), бихме се опитали да създаваме редици и да проверяваме дали отговарят на условието.

5. $|X - Y| = 1$ (12 точки)

Тук важното е, че двете числа са взаимно прости. Различни решения са възможни, подзадачата цели да подсказе, че винаги отговорът когато са взаимно прости е $x + y - 2$.

Забелязваме, че е удобно вместо да гледаме самите числа в редицата да гледаме префиксните суми. Така условията “всеки x поредни да имат положителна сума” и “всеки y поредни да имат отрицателна сума”, съответстват на това, $\text{pref}[i] < \text{pref}[i+x]$ и $\text{pref}[i] > \text{pref}[i+y]$. Това ни насочва да разглеждаме граф с върхове префиксните суми и ребра, казващи, че една префиксна сума е по-малка от друга. Ако им дадем произволни стойности, отговарящи на ребрата, то лесно можем да възстановим елементите, давайки ни решение на задачата. Решаването на тази задача е добре познато, а именно топологично сортиране.

6. $X, Y, Q \leq 100$ (15 точки)

Тук идеята е да пробваме за всяка дължина дали е възможна докато не намерим такава, за която вече не можем да конструираме редица. За фиксирана дължина си строим графа

и проверяваме дали е ацикличен - ако е такъв, значи съществува решение от горното наблюдение. В противен случай не е възможно да се конструира редица с такава дължина.

7. $X, Y, Q \leq 10000$ (15 точки)

Тук модифицираме решението от подзадача 6, като вместо да пробваме за всички дължини, прилагаме двоично търсене по дължината.

8. (35 точки)

Разглеждайки внимателно графа, можем да забележим, че отговорът ни винаги ще е $x + y - 1 - \text{НОД}(x, y)$. Ако допуснем, че може да се направи редица с $x+y-\text{НОД}(x, y)$, то можем да ги групираме по НОД числа и ще получим редица за x_1, y_1 , където те са взаимно прости с дължина x_1+y_1-1 – противоречие. Че има редица с такава дължина се вижда при внимателно разглеждане на графа, че е ацикличен. Намирането на редица ни се изисква само за една заявка, където използваме вече коментираният алгоритъм за намиране на решение, ползвайки префиксните суми. Така отговаряме с константна сложност на всички заявки, с изключение на първата, където отговаряме с $O(x + y - \text{gcd}(x, y) - 1) = O(x+y)$.