АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА КЕРВАН

- ✓ **Тагове**: графи, обхождания, потоци с минимална цена, най-къси пътища, ребра с отрицателна дължина, алгоритъм на Белман-Форд, потенциали на Джонсън, алгоритъм на Дейкстра, списък на инцидентните ребра

Подзадача 1

Тази подзадача би могла да бъде решена дори и с експоненциално решение. Едно такова например е да се разгледат всички възможни пътища от връх 1 до връх N с обхождане в дълбочина. След като сме фиксирали първия вариант за маршрута, премахваме ребрата, който го образуват, от графа и избираме като втори вариант най-късия път от връх 1 до връх N в оставащия граф. От всички възможности избираме тази, в която сборът от дължините на двата пътя е минимална.

Подзадача 2

Допълнителното ограничение, че за всяко ребро от връх u към връх v съществува поне още едно такова, ни позволява да изберем един най-кратък път в графа и да го изведем два пъти. Нека върховете $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{k-1}, r_k$, където $r_1 = 1$ и $r_k = N$, образуват един от най-късите пътища в графа. Тогава за всяко $i \in [1, k)$ съществуват поне две ребра от връх r_i до връх r_{i+1}. Може да използваме едно от тези ребра като част от първия вариант за маршрута, при което ще остане поне едно за втория. Гарантирано е, че това е оптимално решение, тъй като и двата варианта са с минимална възможна дължина. Самото намиране на най-къс път може да се осъществи чрез обхождане в широчина.

Подзадача 3

Фактът, че в тази подзадача $N = M$, в комбинация с ограничението, че всеки връх е достижим от връх 1, може много да ни помогне. Това на практика означава, че има точно два пътя от връх 1 до връх N и освен това всяко ребро принадлежи към един от тези два пътя. Намирането им не би трябвало да представлява особена трудност за състезателите.

Подзадача 4

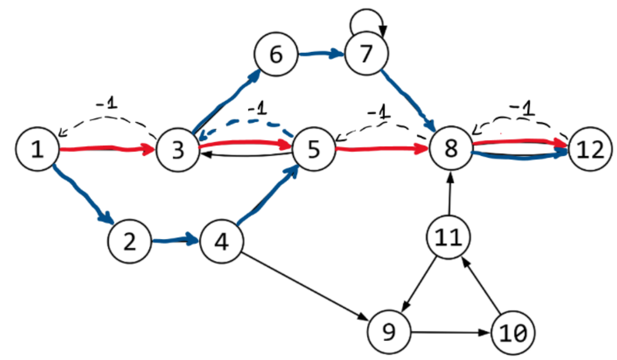
Това е първата интересна подзадача, в която реално се правят важни наблюдения за крайното решение. Задачата е частен случай на проблема за намиране на минимален по цена максимален поток, само че тук не търсим максимален поток, а такъв с големина точно 2. Формулировката би могла да е следната: дадена е мрежа от тръби, всяка от които може да пренася единица поток в точно определена посока за цена 1. Връх 1 е източникът, а връх N – целта, където трябва да пристигне потокът. Търси се минималната цена, за която могат да бъдат прекарани две единици поток през мрежата. Познаването на този проблем и начините за неговото решаване ще бъдат от полза за състезателите, но със сигурност не са задължителни, за да се преборят със задачата. Тук ще приложим подход, който е вдъхновен от метода за добавянето на последователни най-къси пътища.

Първоначално намираме един най-къс път в графа и го запазваме като първи вариант за маршрута. Както е видно от примерния тест в условието, не винаги използването на най-краткия път като първи вариант, ще доведе до оптимално решение, а в някои случаи дори няма да е възможно такова решение. Все пак ако задачата беше да намерим само един път, именно някой най-къс път щеше да е най-оптимален, така че затова започваме от него.

АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА КЕРВАН

Необходим ни е механизъм, по който да можем да променяме първия вариант за маршрута по време на търсенето на втория т.е. ако установим, че използването на някое от ребрата от първия вариант не е оптимално, да може да го премахнем. Затова на мястото на всяко ребро от връх u до връх v, което участва в първия вариант за маршрута, създаваме ребро, което е в обратната посока (от v към u) и има дължина -1. Преминаването по това "обратно" ребро би означавало, че се отказваме да използваме съответното ребро от първия път и поради това то има дължина -1. Задачата се свежда до намирането на най-къс път в този модифициран граф.

Нека да разгледаме примерния тест.



В него най-късият път от връх 1 до връх N е $1 \to 3 \to 5 \to 8 \to 12$. Премахваме червените ребра от графа и добавяме обратни с дължина -1. Най-късият път в новополучения граф е $1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6 \to 7 \to 8 \to 12$. Той има дължина 6, което събрано с 4 – дължината на първия път, всъщност дава отговора на задачата. Но защо?

В момента, в който преминаваме от връх 5 към 3 по обратното ребро, всъщност правим следното:

1. Отказваме се от реброто $3 \to 5$.
2. Използваме частта от първия път от връх 5 до връх N като продължение на втория път, който до момента е стигнал до връх 5.
3. Посредством реброто $5 \to 3$ се връщаме във връх 3, откъдето търсим продължение на първия път до N.

Така реално намерените два пътя ни дават търсените два пътя, а именно $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 8 \to 12$ и $1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 8 \to 12$. Ключовата идея е, че всеки път, когато минаваме по обратно ребро, използваме частта от единия път, за да довършим другия, и се връщаме към връх, от който трябва да намерим път до N, за да довършим този път, който сме "счупили".

Очевидно не може да приложим директно алгоритъма на Дейкстра, за да намерим най-краткия път в графа, понеже той съдържа отрицателни ребра. Затова в тази подзадача използваме алгоритъма на Белман-Форд, който има сложност $O(NM)$.

Подзадача 5

Понеже графът е генериран по случаен начин, вместо алгоритъма на Белман-Форд може да използваме SPFA (Shortest Path Faster Algorithm) за намиране на най-къс път в графа. Макар и да има случаи, в които той също работи за сложност $O(NM)$, повечето експерименти показват, че времето му за работа в произволни графи е от порядъка на $O(M)$.

АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
КЕРВАН

Подзадача 6

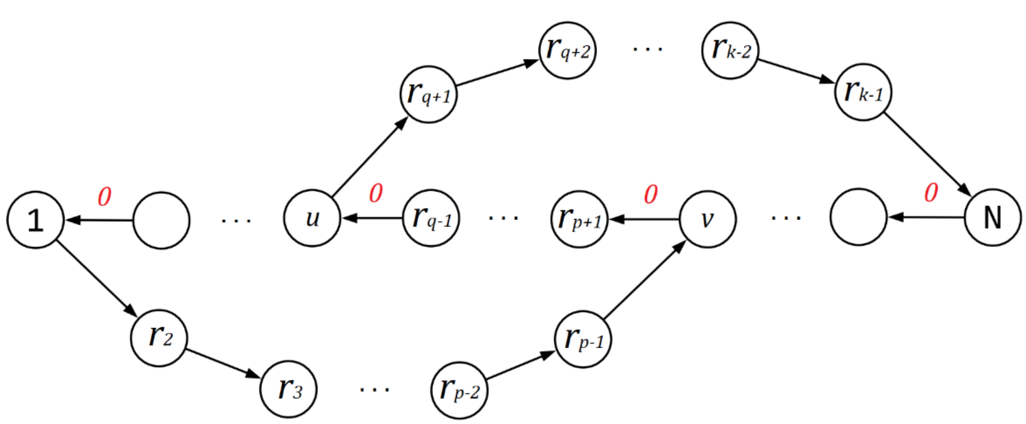
Дотук задачата беше възможна за състезателите в група В. Последната задача е оценена само за 15 точки, защото е доста над очакваната трудност за тази възрастова група. Решението използва общата идея от предишните две задачи, но я надгражда чрез редица хитри наблюдения. Може би повечето запознати с този подход го асоциират с алгоритъма на Джонсън за намиране на най-късите пътища между всички двойки върхове в граф без ограничение за неотрицателност на дължините на ребрата за сложност $O(N^2 \log_2 N + NM)$, който включва алгоритмите на Белман-Форд и на Дейкстра, за да постигне по-добра сложност за решаване на задачата от тази на алгоритъма на Флойд-Уоршъл. Исторически подобна идея се появява и няколко години преди публикуването на алгоритъма на Johnson в алгоритъма на Suurballe, който решава именно задачата за намиране на два пътя с минимална сумарна дължина, които нямат общи ребра, в ориентиран граф без отрицателни дължини на ребрата.

Нека означим с $d(u)$ – най-късия път от 1 до u в началния граф. Ще трансформираме графа, като прибавим към дължината на всяко ребро от u към v стойността $d(u) - d(v)$ т.е. $w'(u,v) = d(u) + w(u,v) - d(v)$. Очевидно е, че $w'(u,v) \geq 0$, защото иначе $d(u) + w(u,v) < d(v)$, което е противоречие с дефиницията, че $d(v)$ е дължината на най-късия път от 1 до v. От друга страна нека разгледаме всички пътища $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{k-1}, r_k$, за които $r_1 = 1$ и $r_k = N$. Дължината на такъв път в модифицирания граф е:

$$d(r_1) + w(r_1, r_2) - d(r_2) + d(r_2) + w(r_2, r_3) - d(r_3) + \dots + d(r_{k-1}) + w(r_{k-1}, r_k) - d(r_k)$$
$$= w(r_1, r_2) + w(r_2, r_3) + \dots + w(r_{k-1}, w_k) - d(r_k), \text{ тъй като } d(r_1) = 0$$

Това показва, че от всеки път между 1 и N е извадено едно и също число $d(r_k)$ – дължината на най-късия път от 1 до N. Следователно ако един път е по-къс от друг преди модификацията, то и след модификацията отношението се запазва. Освен това, най-късите пътища в графа ще станат с дължина 0.

Да намерим стойностите на $d(u)$ в началния граф, е лесно постижимо чрез обхождане в широчина. Това обаче ни е достатъчно, за да намерим само един най-къс път в графа, а ние търсим и втори, при това не в същия граф, а в този, който описахме в частта с решението за подзадача 4. Оказва се обаче, че използвайки същите дължини на ребрата, можем да намерим и втория път. Игнорираме върховете, до които няма път от връх 1, както и тези, от които няма път до връх N, след като обърнем ребрата от най-късия път. Всички пътища, които не включват обратно ребро, имат дължина с $d(N)$ по-малка от реалната.



АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА КЕРВАН

Това е валидно и за пътищата, които съдържат обратни ребра. Нека разгледаме един такъв път $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-2}, r_{p-1}, r_p, r_{p+1}, \dots, r_{q-1}, r_q, r_{q+1}, r_{q+2}, \dots, r_{k-2}, r_{k-1}, r_k$, където $r_1 = 1$, $r_k = N$, $r_p = v$, $r_q = u$ и частта от $v \to u$ съдържа само обратни ребра. Дължината на тези ребра след преизчислението остава 0 (защо?). Сега да изразим реалната дължина на този път, използвайки фиктивната.

1. Реалната дължина на частта от пътя от връх 1 до връх v е $p-1$. Фиктивната е $p-1-d(v)$.
2. Реалната дължина на частта от пътя от връх v до връх u е $d(u)-d(v)$. Фиктивната е 0.
3. Реалната дължина на частта от пътя от връх u до връх N е $k-q$. Фиктивната е $d(u)+k-q-d(N)$.

$\Rightarrow$ Фиктивната дължина на целия път е с $d(N)$ по-малка от реалната.

Това твърдение лесно може да се генерализира за случаите, в които пътят съдържа повече от една част, състояща се от обратни ребра.

Така вече може да приложим алгоритъма на Дейкстра за намиране на втори най-къс път, защото ребрата имат неотрицателна дължина. Сложността на решението е $O(M \log_2 M)$.

Автор: Добрин Башев