**АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА**

**РАЗПИСАНИЕ**

При оптималното решение редът за обработката на детайлите на първата и втората машина трябва да бъде еднакъв. Това е така, защото детайлите за втората машина стават достъпни само след обработката им на първата машина и ако има няколко детайли, чакащи за втората машина, времето им за обработка ще бъде равно на сумата от техните bi, независимо от реда им. Тогава е най-изгодно да сложим на втората машина детайла, който е била обработен по-рано от останалите на първата машина.

Да разгледаме такъв ред на обработване, който съвпада с реда на индексите, с които се номерират детайлите във входа на задачата: 1, 2, ... , n. Означаваме с xi времето за бездействие на втората машина непосредствено преди тя да започне да обработва i-тия детайл. Целта е да минимизиране сумарното време за бездействие: X=x1+x2+...+xn.

За първия детайл имаме x1=a1, a за втория: x2=max((a1+a2) – (x1+b1),0), защото втората машина се освобождава в момента x1+b1.

Аналогично за третия детайл имаме x3=max((a1+a2+a3) – (x1+b1+ x2+b2),0) и за k-тия детайл:

xk=max((a1+...+ak) –(b1+...+bk) –(x1+...+bk),0)

Да пресмятаме последователните суми:

X1 = x1,

X2 = x1+x2 = x1 + max((a1+a2) – (x1+b1),0) = max (x1, (a1+a2) – (b1)) ,

X3 = x1+x2 + x3 = max (x1, (a1+a2) – (b1)) + max((a1+a2+a3) – (x1+b1+ x2+b2),0) =

 = max (x1, (a1+a2) – (b1), (a1+a2+a3) – (b1+b2)),

и ако означим Ак= а1+...+ak, Bк= b1+...+bk, и Ck = Ak – Bk−1, получаваме, че сумарното време за бездействие на втората машина е X = Xn = max(C1, ..., Cn)

Нека да разменим два съседни елемента с индекси i и j (i<j, т.е. j=i+1) и редът за обработка от

1,2, ..., i, j, ..., n да стане 1,2,..., j,i, ...,n

При тази размяна само две от стойностите в редицата C1, ..., Cn се променят и това са Ci и Cj. Нека новите им стойности означим с Di и Dj. Ако предположим, че първоначалният ред на обработване е оптимален, сега след размяната X няма да намалее, т.е. max(Ci, Cj) ≤ max(Di, Dj), което е еквивалентно с max( −aj, −bi) ≤ max( −bj, −ai) или min( ai, bj) ≤ min( bi, aj)

Това означава, че когато детайлите са сортирани така, че за всеки два последователни детайла с индекси i и j, j=i+1, е изпълнено, че min( ai, bj) ≤ min(bi, aj), тогава имаме оптимално разпределение. Условието min( ai, bj) ≤ min(bi, aj) използваме като компаратор за сортиране, защото то определя транзитивна наредба.

Литература: <https://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/papers/2008/P402.pdf>

*Автор: Емил Келеведжиев*