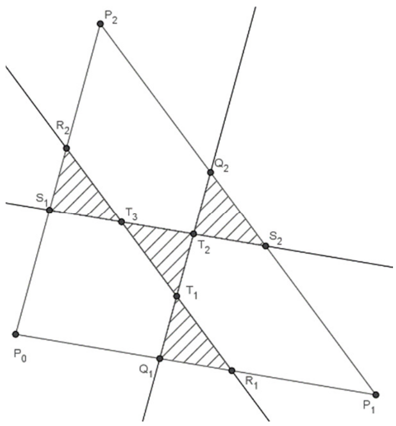
# АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ЗЕМЕДЕЛ(ЕН)ИЕ




*Фиг. 1*

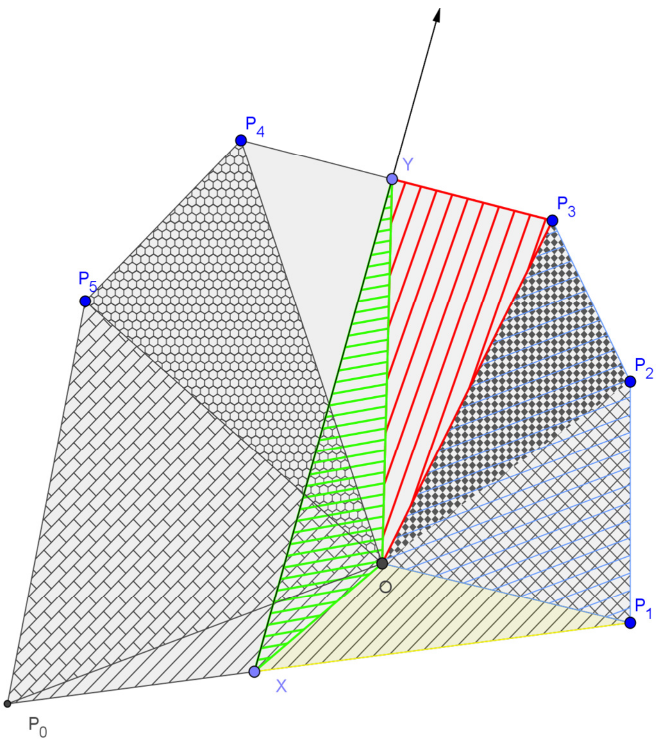
В задачата е даден изпъкнал многоъгълник **P** и трябва да се построят три прави, които разделят **P** на седем части по такъв начин, че ако частите се оцветят шахматно (така че да няма две части от един и същи цвят, които граничат по отсечка), всички бели части да имат едно и също лице и всички черни части също да имат едно и също лице.

Когато **P** е триъгълник, правите, които делят две съседни страни в отношение 3:2, считано от общия им връх, решават задачата (фиг. 1).

Нека $\mathbf{P} = P_0P_1\ldots P_{n-1}$ (върховете са номерирани обратно на часовниковата стрелка) и лицето на **P** е равно на $S$. За две точки X и Y от контура на **P**, нека $s$(X; Y) означава лицето на тази част от **P**, която се намира вдясно от лъча $\overrightarrow{XY}$. Всички индексации са по модул $n$.

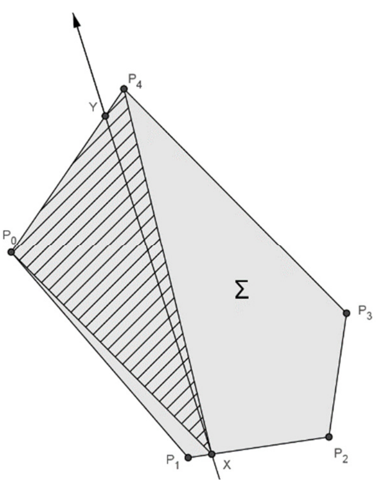
В самото начало ще направим O($n$) предварителни изчисления, които ще ни позволят по-късно да пресмятаме бързо всички необходими лица. Нека [**F**] означава ориентираното лице на фигурата **F** (тоест, лицето на **F** със знак плюс, ако обхождаме контура на **F** обратно на часовниковата стрелка, и със знак минус в противен случай). Да изберем една вътрешна точка O за **P** и да пресметнем лицата $T_i = [OP_{i-1}P_i]$ за $i$=1, 2, …, $n$, като съхраним сумите $S_0 = 0$; $S_i = S_{i-1} + T_i$. След това всички нужни ни лица можем да намираме константно. Така например, ако X лежи върху $P_aP_{a+1}$ и Y лежи върху $P_bP_{b+1}$ (фиг. 2), то:

$$s(X;Y) = [OXP_{a+1}] + (S_b - S_{a+1}) + [OP_bY] - [OXY].$$



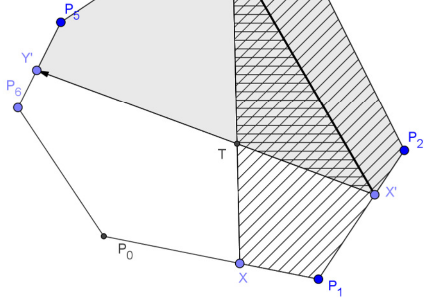

*Фиг. 2*

Да дефинираме първо функцията $f(\alpha;X)$, която по дадени $0 < \alpha < 1$ и X от контура на **P** намира такова Y от контура на **P**, че $s(X;Y) = \alpha S$. Тази функция може да се реализира така: първоначално с двоично търсене намираме два последователни върха $P_i$ и $P_{i+1}$ на **P**, такива, че $s(X; P_i) \le \alpha S \le s(X; P_{i+1})$. Ако някъде се постига равенство, това е търсената точка Y. Иначе нека Y е точката, за която $P_iY = t.P_iP_{i+1}$. Понеже при тези условия $s(X;Y)$ е линейна функция на $t$, оттук лесно можем да определим правилното разположение на Y (фиг. 3): означаваме $\Sigma = s(X; P_i)$; тогава $t = \frac{s_{XP_iY}}{s_{XP_iP_{i+1}}} = \frac{\alpha S - \Sigma}{s_{XP_iP_{i+1}}}$. Тогава $Y_x = P_{i_x} + t\left(P_{{i+1}_x} - P_{i_x}\right)$ и $Y_y = P_{i_y} + t\left(P_{{i+1}_y} - P_{i_y}\right)$.




*Фиг. 3*

Нека сега X и X' са две точки от контура на **P** и $Y = f(\alpha;X)$ и $Y' = f(\alpha;X')$. Ако точките X, X', Y и Y' лежат в този ред по контура на **P** обратно на часовниковата стрелка, то с $c$(X;X') означаваме отношението на лицето на сечението на частите от **P**, които са вдясно от лъчите $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{X'Y'}$, към цялото лице на многоъгълника (фиг. 4). Ако означим с T пресечната точка на XY и X'Y', търсеното отношение можем да изчислим като $c(X;X') = (s(X'Y) + [X'YT])/S$. В противен случай (тоест, ако тези четири точки не са разположени по този начин), полагаме $c(X,X') = 0$.




*Фиг. 4*

Да дефинираме функцията $g(\alpha,\beta,\mathrm{X})$, $0 < \beta < \alpha < 1$, X от контура на **P**, която действа по следния начин:

- Първоначално намира $\mathrm{Y} = f(\alpha,\mathrm{X})$.
- След това с двоично търсене намира такова X' върху контура на **P**, което лежи след X и преди Y обратно на часовниковата стрелка и за което $c(\mathrm{X},\mathrm{X}') = \beta$.

Причината да можем да приложим двоично търсене тук е, че, когато X' описва контура на **P** обратно на часовниковата стрелка от X до Y, стойността на $c(\mathrm{X};\mathrm{X}')$ се изменя непрекъснато от $\alpha$ до 0 (фиг. 4). При това се оказва, че $c(\mathrm{X};\mathrm{X}')$ намалява монотонно.

Наистина, нека X, X', X" и Y са разположени в този ред обратно на часовниковата стрелка и $A = X'Y' \cap X''Y''$, $B = X''Y'' \cap XY$ и $C = XY \cap X'Y'$. Тези точки лежат върху съответните отсечки, защото в противен случай някоя от равнолицевите области вдясно от лъчите $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{X'Y'}$ и $\overrightarrow{X''Y''}$ ще се съдържа вътре в друга. Ако B лежи върху отсечката CY, областта, съответна на $c(\mathrm{X};\mathrm{X}')$, съдържа тази, съответна на $c(\mathrm{X};\mathrm{X}'')$, и няма какво повече да се доказва. Ако ли пък не, то забелязваме, че лицето на AX'–X" (тук X'-X" е част от контура на **P**) е равно на лицето на AY'–Y", което съдържа в себе си ABC. Но като добавим към лицата на AX'–X" и ABC лицето на ACY–X", получаваме точно $c(\mathrm{X},\mathrm{X}')$ и $c(\mathrm{X},\mathrm{X}'')$, с което доказателството завършва.

С първата част от търсенето (по върховете) намираме отсечката (страна на **P** или част от нея), на която принадлежи точка X', след което доуточняваме положението ѝ върху отсечката.

Най-накрая, да дефинираме функция $h(\alpha,\beta,\mathrm{X})$, $0 < \beta < \alpha < 1$, X от контура на **P**, така: последователно намира $\mathrm{X}' = g(\alpha,\beta,\mathrm{X})$ и $\mathrm{X}'' = g(\alpha,\beta,\mathrm{X}')$, след което пресмята $c(\mathrm{X}'',\mathrm{X})$.

Да си представим, че сме намерили такива $\alpha$, $\beta$ и X, че

$$\left|\begin{array}{l} \alpha < ½ \\ h(\alpha;\beta;\mathrm{X}) = \beta \\ 1 - 3\alpha + 3\beta = \beta. \end{array}\right.$$

Лесно се вижда, че тогава XY, X'Y' и X"Y" са три прави, които изпълняват условието на задачата.

Да фиксираме произволно X от контура на P. Когато $\alpha = ⅓$ имаме $h(⅓, 0, \mathrm{X}) > 0$. За $\alpha = ½$ е изпълнено $h(½, ¼, \mathrm{X}) = 0$. Понеже $h\left(\alpha, \frac{3\alpha-1}{2}, \mathrm{X}\right) - \frac{3\alpha-1}{2}$ е непрекъсната функция на $\alpha$, следва, че в интервала (⅓, ½) има стойност на $\alpha$, за която $h\left(\alpha, \frac{3\alpha-1}{2}, \mathrm{X}\right) = \frac{3\alpha-1}{2}$ и която, следователно, ни дава решение на задачата. Тази стойност можем да приближим произволно добре чрез клатене.

Да оценим най-накрая бързодействието на алгоритъма.

Всяко извикване на $f$ отнема $O(\log n)$ стъпки. Ако с $d$ означим точността, с която работим, всяко извикване на $g$ съдържа в себе си $O\left(\log n + \log\frac{1}{d}\right)$ извиквания на $f$ и, следователно, (понеже $d$ е фиксирано) отнема $O(\log^2 n)$ стъпки. Най-накрая, намирането на подходящо $\alpha$ съдържа в себе си $O(\frac{1}{d})$ извиквания на $g$.

*Автор: Николай Белухов*

*Тестове, чекер и реализация: Павлин Пеев*