АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
МИШКИ

Задачата се решава чрез прилагане на подхода „разделяй и владей”. Нека с $A = (A_1, A_2,\ldots, A_{2^K})$ означаваме пермутация на числата от 1 до 2^K, която съответства на номерата на мишките в клетките-листа отляво надясно в дървото след изпълнение на поредната размяна на поддървета в него. С $f(A)$ да означим броя на пресичанията на отсечките свързващи мишките с хранилките им, съответстващ на пермутацията A. В задачата се иска да се намери минимумът на $f(A)$ в множеството от пермутации A, които могат да се получат чрез прилагането на описаната в условието операция – да означим тази стойност с $(f)_{min}$.

За удобство ще казваме, че отсечките в графичното представяне започват в клетките на мишките и завършват в хранилките.

Нека, при получена някаква пермутация A, с A_l означим лявата ѝ половина (съответстваща на номерата на листата в лявото поддърво на корена), а с A_r – дясната ѝ половина (съответстваща на номерата на листата в дясното поддърво на корена). С $f(A_l)$ да означим броя на пресичанията на отсечки, при които и двете пресичащи се отсечки започват от листа с номера от A_l (т.е. листа от лявото поддърво на корена). Аналогично се дефинира $f(A_r)$.

С $g(A_l, A_r)$ да означим броя на пресичанията на отсечки, при които едната от пресичащите се отсечки започва от лист с номер от A_l (лист от лявото поддърво), а другата от лист с номер от A_r (лист от дясното поддърво). Тогава са верни следните твърдения:

1. $f(A) = f(A_l) + f(A_r) + g(A_l, A_r)$ – очевидно.
2. Ако налице е била пермутация A, разменим лявото и дясното поддървета (изпълним разрешената операция спрямо двете поддървета на корена) и получим нова пермутация $A1$, то: $f(A1_l) = f(A_r)$ и $f(A1_r) = f(A_l)$ – очевидно.
3. Ако $f(A)$ е минимално, то минимални са и $f(A_l)$, и $f(A_r)$ – лесно се доказва чрез допускане на противното.

След всичко написано е ясно, че:

$$(f)_{min} = \min\{[(f_l)_{min}+(f_r)_{min}+ g(A_l, A_r)], [(f_l)_{min}+(f_r)_{min}+ g(A_r, A_l)]\},$$

където $g(A_r, A_l)$ е стойността на функцията g след размяната на двете поддървета. Рекурсивно потъвайки по поддърветата ще бъде намерен търсеният минимум.

Остава да се опише бърз алгоритъм за изчисляване на $g(A_l, A_r)$. Да образуваме два масива: B_l – съдържащ номерата на хранилки, които са краища на отсечките, започващи от листа с номера в A_l, и B_r – съдържащ номерата на хранилки, които са краища на отсечките, започващи от листа с номера в A_r. Вярно е следното твърдение: една отсечка, започваща от връх, чийто номер е в A_l и завършваща в хранилка b, се пресича точно с ония отсечки, започващи от връх, чийто номер е в A_r, които завършват в хранилки с номера по-малки от b.

Ако сортираме масивите B_l и B_r в нарастващ ред, то $g(A_l, A_r)$ може да бъде изчислена линейно чрез асинхронно обхождане на двата масива с техника, подобна на тази, която се използва при сливането на масиви.

Общата сложност на алгоритъма е $O(NlogN)$, където $N=2^K$ е броят на мишките (съответно клетките и хранилките).

Автор: Руско Шиков