АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА РАЗЛИКИ ОТ КВАДРАТИ

Означаваме с n разликата b-a+1.

Простото обхождане на интервала [a, b] и определянето дали всяко число има поне две представяния като сума от квадрати не трябва да носи точки.

Ако означим числата, чиято разлика от квадрати разглеждаме, с x и y (x>y), то от $a \le x^2 - y^2 \le b$ следват ограничения за x и y: очевидното $x > \sqrt{a}$ и от $x^2-(x-1)^2 \le b$ следва $x \le \frac{b+1}{2}$ и, естествено, $1 \le y < x$. Така можем да генерираме разликите от квадрати, попадащи в интервала и да броим колко пъти се получава число от интервала. За тази идея трябва да са отделени съответните броячи. Всеки от тях може да има едно от трите състояния: няма представяне, има едно представяне и има повече от едно представяне. Нужни са два бита информация за кодирането им, като едно състояние остава неизползвано. Ако искаме да спестим памет, можем да използваме факта, че $3^5=243<256=2^8$: така в един байт можем да кодираме не четири, а пет брояча: всеки от петте разреда на записа в байта, разгледан като троично число, показва състояние на съответния „брояч“.

n mod 4	k mod 4	(n^2-k^2) mod 4
0	0	0
0	1	3
0	2	0
0	3	3
1	0	1
1	1	0
1	2	1
1	3	0
2	0	0
2	1	3
2	2	0
2	3	3
3	0	1
3	1	0
3	2	1
3	3	0

Таблица 1

Ще се спрем на следните факти, които могат да бъдат забелязани при изследване на резултатите:

- Числата от вида $4k$+2 нямат представяне като разлика от квадрати.

Наистина, в таблица 1 са показани всички възможности за остатъци на разлика от квадрати по модул 4. Остатък 2 не се получава никъде.

- Нечетните прости числа имат единствено представяне като разлика от квадрати.

Както е известно, $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, следователно разликата от квадрати на цели числа трябва да може да се представи като произведение на две естествени числа, като, разбира се, $x-y<x+y$. Ако p е нечетно просто, то има единствена алтернатива за такова представяне, а именно $x-y=1$ и $x+y=p$ (която, впрочем, наистина дава решение).

- Квадратите на нечетни прости числа, също не могат да имат повече от едно представяне.

Както по-горе, единствената алтернатива е $x-y=1$ и $x+y=p^2$, поради строгото $x-y<x+y$.

- Ако p е нечетно просто, $4p$ има единствено представяне като разлика от квадрати.

Единствената алтернатива, даваща решение в този случай, е $x-y=2$ и $x+y=2p$. Другите отпадат при събиране на двете равенства и проверка по четност.

- Аналогично това важи и за числата от вида $4p^2$, където p е нечетно просто.
- 1 и 4 нямат представяния като разлика от естествени квадрати.
- $8 = 3^2-1^2$ и $16 = 5^2-3^2$ имат по едно представяне като разлика от естествени квадрати.
- Всички други числа имат по повече от едно представяне като разлика от квадрати.

Така можем от всички n числа в дадения интервал да премахнем описаните по-горе, които имат 0 или 1 представяне. За целта в интервала [a, b] трябва да разпознаем и преброим тези, които дават остатък 2 при деление на 4, простите числа, квадратите на прости числа, учетворените прости и учетворените квадрати на прости числа. Разпознаването на прости числа може да бъде постигнато със сложност $b \log(\log b)$ чрез решетото на Ератостен. За реализацията му е необходим 1 бит информация като представител на всяко от числата от 2 до b. Можем да спестим половината от нужната памет, като приложим решетото върху множеството от нечетните числа. Числата от вида $4k$+2 и простите числа в интервала [a, b] „отписваме“ директно, с тези от вида $4p$, p^2 и $4p^2$ (където p е нечетно просто) се справяме, като броим нечетните прости числа съответно в интервалите $\left[\frac{a}{4}, \frac{b}{4}\right]$, $\left[\sqrt{a}, \sqrt{b}\right]$ и $\left[\frac{\sqrt{a}}{2}, \frac{\sqrt{b}}{2}\right]$.

Автор: Павлин Пеев