АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА МАКСИМАЛНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Да въведем първо означения. Нека a_1, a_2, ..., a_k са числата в един от наборите с максимално произведение, като a_i има d_i цифри – можем да смятаме без загуба на общност, че $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_k$. Нека още e_i^j е j-тата цифра на a_i от ляво надясно, така че p-ичният запис на a_i е $\overline{e_i^1 e_i^2 \cdots e_i^{d_i}}$.

Понеже този набор е максимален, при разместване на цифрите в него така, че числата да останат със същия брой цифри, произведението трябва да остане същото или да намалее. Ще използваме този факт, за да получим някои неравенства между цифрите.

Преди всичко, ясно е, че $e_i^1 > e_i^2 > \cdots > e_i^{d_i}$ – в противен случай бихме могли да увеличим произведението, просто като разместим цифрите на a_i.

Нека сега $d_i < d_j$. Нека първите d_i цифри на a_j да образуват числото A, а последните $d_j - d_i = m$ – числото B. Като „отрежем“ B от a_j и го „залепим“ накрая на a_i, ще получим набор, в който числата имат същия брой цифри като в началния и, следователно, произведението е не по-голямо. Оттук, $a_i a_j = a_i(Ap^m + B) \ge A(a_i p^m + B)$ и следователно $a_i B \ge AB$. Ако $B \ne 0$, то значи $a_i \ge A$; понеже a_i и A имат един и същи брой цифри, оттук $e_i^1 > e_J^1$. Ако пък $B=0$, то значи $m=1$ и можем при нужда да преместим завършващата нула на a_j накрая на най-голямото измежду d_i-цифрените числа в набора, без да променяме произведението. И в двата случая, можем да смятаме без загуба на общност, че $e_1^1 > e_2^1 > \cdots > e_k^1$

Нека сега да видим какво се получава, като разменим цифрите e_i^u и e_j^v, където $u>1$ и $v>1$. Нека A е числото, което се получава от a_i, когато e_i^u се замести с 0, $m=d_i-u$, B е числото, което се получава от a_j, когато e_j^v се замести с 0 и $n=d_j-v$. Тогава:

$$a_i a_j = (A + e_i^u p^m)(B + e_j^v p^n) \ge (A + e_j^v p^m)(B + e_i^u p^n) \text{ и, значи, } (Ap^n - Bp^m)(e_j^v - e_i^u) \ge 0.$$

В случая, когато $i<j$ и $u=v$, числата Ap^n и Bp^m имат един и същи брой цифри, но първото има по-голяма първа цифра. Това означава, че в този случай имаме $Ap^n - Bp^m > 0$ и, следователно, $e_i^u < e_j^u$.

В случая, когато i и j са произволни, но $u<v$, числото Ap^n има по-малко цифри от Bp^m и, следователно, $Ap^n - Bp^m < 0$ и $e_i^u > e_j^v$.

Така получените неравенства, обаче, ни позволяват да реконструираме набора a_1, a_2, ..., a_k еднозначно. А именно: трябва да запълним разрядите в низходящ ред на наличните цифри по следния начин: първо запълваме старшите разряди, след това – вторите по старшинство, после – третите, и така нататък. При това, старшите разряди запълваме в посока от най-късите числа към най-дългите, а всички след тях – обратно, от най-дългите числа към най-късите. Така например, за цифрите A, 3, 2, 4, 8, 5, 7, 6, 9 и $(d_1, d_2, d_3) = (2, 3, 4)$ получаваме оптималния набор A5, 963, 8742.

Автор: Николай Белухов