АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
ИГРА С ТОПЧЕТА

Да разгледаме ориентиран граф, върховете на който са наредени тройки числа (x, y, z), описващи възможно разпределение на топчетата в трите кутии. Първото число описва броя на топчетата в първата кутия, второто число – във втората, третото число – в третата кутия. Ясно е, че $x + y + z = a_1 + a_2 + a_3$. От един връх към друг има ребро тогава и само тогава, когато с един ход може да се премине от едното разпределение на топчетата към другото. Първите две подзадачи могат да се решат чрез търсене на най-къс път в ориентиран граф без тегла на ребрата от връх (a_1, a_2, a_3) до най-близкия връх от множеството от върхове, за които поне една от координатите на съответната им наредената тройка числа е 0. Стандартната реализация на алгоритъма за обхождане на графа в ширина решава първата подзадача. При това е достатъчно да се помни броя на топчетата само в първите две кутии, тъй като общият брой на топчетата е постоянен. Ако $a_1 + a_2 + a_3 = n$, сложността по памет на тази реализация е $O(n^2)$. За решаването на втората подзадача е необходимо да се намали паметта, която се използва за отбелязване на обходените върхове. Това може да стане чрез използване на контейнера map от библиотеката STL. Така използваната памет става пропорционална на броя на обходените върхове. При $k < 15$ този брой най-лошия случай с малко надвишава сумата $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{14} = 7174453$.

За решаване на третата подзадача ще се откажем от търсене на най-къс път и ще реализираме алгоритъм, който сравнително бързо намира решение на задачата за големи стойности на *n* при стойности на *k*, за които не ни достига памет за откриване на най-къс път. Идеята за решението е следната: Да означим с $\min(x, y, z)$ най-малкото от трите числа x, y и z. Ще опишем алгоритъм, чрез който с разрешени ходове от всяка тройка числа (x, y, z) може да получим тройка (x_1, y_1, z_1), за която $\min(x_1, y_1, z_1) < \min(x, y, z)$. Тогава е ясно, че след краен брой ходове ще достигнем до тройка числа, в която едно от числата ще е 0. Ако две от числата x, y и z са равни, то прилагайки над тях разрешената операция, получаваме тройка числа, съдържаща 0. Нека x, y и z са различни. Без ограничение на общността може да считаме, че $0 < x < y < z$. Да разделим y на x с частно и остатък. Имаме $y = xq + r$, като $0 \le r < x$. Нека $q = a_m.2^m + a_{m-1}.2^{m-1} + \cdots + a_1.2^1 + a_0.2^0$ е двоичният запис на q. Следователно $y = \left(a_m.2^m + a_{m-1}.2^{m-1} + \cdots + a_1.2^1 + a_0.2^0\right)x + r$. Започвайки от тройката числа (x, y, z), извършваме последователно $m+1$ хода. За i от 0 до m, ако $a_i = 0$ прехвърляме топчета от третата в първата кутия; ако $a_i = 1$ прехвърляме топчета от втората в първата кутия. След тези ходове в първата кутия ще има $2^{t+1}.x$ топчета, във втората кутия – r топчета, а в третата кутия – $x + y + z - 2^{t+1}.x - r$ топчета.

Не е трудно да се покаже, че и трите числа са неотрицателни. При това получихме тройка числа $(x_{m+1}, y_{m+1}, z_{m+1})$, за която $\min(x_{m+1}, y_{m+1}, z_{m+1}) < \min(x, y, z)$.

Автор: Младен Манев