АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
КВАДРАТИЧЕН КВАДРАТ
(по идея на Светлозар Дойчев)

Оказва се, че задачата винаги има решение, нещо повече: за всички N след определена граница задачата има решение с големина N, което решава въпроса за минималността от известно място нататък и потвърждава колко силно е завишено ограничението за „липса на решение“. Ако търсим оптималното решение, крайните резултати ще останат в типа `long`.

Съществуване и намиране на едно (не задължително оптимално) решение

Алгоритъмът, описан по-долу, решава проблема за съществуване, както, при необходимост, и за („добро“) начално ограничение за големината на решението (и печели поне 40% от точките за всеки тест). На фигурите ще разглеждаме случая M=5, по-малките квадрати се съдържат в него.

A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}
A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{35}
A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}	A_{45}
A_{51}	A_{52}	A_{53}	A_{54}	A_{55}

$c^2A_{11}+t$	$c^2A_{12}-t$	$c^2A_{13}+t$	$c^2A_{14}-t$	$c^2A_{15}+t$
$c^2A_{21}-t$	$c^2A_{22}+t$	$c^2A_{23}-t$	$c^2A_{24}+t$	$c^2A_{25}-t$
$c^2A_{31}+t$	$c^2A_{32}-t$	$c^2A_{33}+t$	$c^2A_{34}-t$	$c^2A_{35}+t$
$c^2A_{41}-t$	$c^2A_{42}+t$	$c^2A_{43}-t$	$c^2A_{44}+t$	$c^2A_{45}-t$
$c^2A_{51}+t$	$c^2A_{52}-t$	$c^2A_{53}+t$	$c^2A_{54}-t$	$c^2A_{55}+t$

Фиг. 1

Нека имаме зададен някакъв квадратичен квадрат **A** (фиг. 1, вляво). Индексите на елементите са ред/колонка, така за по-малките размерности можем да гледаме първите редове и колонки. Тогава квадрат **A'** от вида вдясно, получен от дадения по записания начин (където c и t са цели числа), е „кандидат-квадратичен“, доколкото очевидно изпълнява най-сложното свойство: сумата от всеки два съседа да е точен квадрат; остава само всички числа в него да са положителни и различни. Казано с други думи, даден квадратичен квадрат може да се преобразува в друг чрез прилагане на следните три операции: умножаване на всички елементи по квадрата на някое цяло число c; алтернативно прибавяне/изваждане на цяло число t към всички елементи; осигуряване на това, щото получаваните резултати да са положителни и различни. С помощта на този алгоритъм можем да си „нагласим“ начално решение. Откъде да вземем началния **A**? Можем да си генерираме подходящ (не е нужно да е чак толкова бързо), а за N<5 имаме и зададени наготово в задачата – в тестовия пример. (Разбира се, всеки „подквадрат“ на квадратичен квадрат също е квадратичен.)

Нека имаме квадратичния квадрат **A** със страна M и число N, което трябва да присъства в него. Едно „нагласяне” може да се постигне със следния алгоритъм:

- нека d е едно число от **A**. Избираме $s = \left\lceil \sqrt{\dfrac{N}{d}} \right\rceil$, което ни осигурява $s^2 d \geq N$;
- умножаваме всички елементи на **A** с s^2. Получаваме квадратичен квадрат **A'**; елементът d' на избраното място не е по-малък от N;
- избираме t = ± (d' – N) и алтернативно събираме/изваждаме t от всички елементи на **A'**. Знакът, с който вземаме t, разбира се, зависи от мястото на d в квадрата (след действието там трябва да се получи N). Полученият квадрат е „кандидат-квадратичен”. Ако всички елементи в него са положителни и различни – това е един от желаните квадратични квадрати. В противен случай увеличаваме s с 1 и повтаряме процеса, докато получим истински квадратичен квадрат с N на желаната позиция. Можем да приложим този алгоритъм за всяка позиция и да изберем най-малкия получен квадратичен квадрат.

Пълно изчерпване

Оказва се, че при добра реализация на изчерпването и разумно поставяне на начално ограничение не се нуждаем от намиране на начално решение по горния (или подобен) начин.

19	9	2	4	11
17	7	1	3	10
18	8	5	6	12
20	15	13	14	16
25	23	21	22	24

Фиг. 2

Ясно е (фиг. 2), че можем да считаме, че *N* заема някоя от позициите в горната лява „четвъртина“ (квадратът, очертан с по-тъмна рамка на фигурата): ако е някъде другаде, просто завъртаме големия квадрат на ±90° или на 180°, така че *N* да попадне там. Нека се опитаме да генерираме решение, в което *N* се намира на някоя позиция от разглежданата „четвъртина“, например, на позицията, означена с 1. Най-естественият подход за запълване на квадрата е да организираме вълнà около вече поставения елемент. Другите начини на запълване са аналогични, но, като имаме предвид разглежданията по-долу, драстично по-добра е стратегията да опитваме намиране на решение веднага щом запълним два съседа на някое незапълнено квадратче. Тук ще считаме, че извършваме запълването, започвайки от горния съсед; следват десният и квадратчето горе-вдясно, долният и квадратчето долу-вдясно, левият и квадратчетата долу-вляво и горе-вляво (тези, които съществуват, разбира се). При тези споразумения на фиг. 2 са номерирани позициите в реда, в който се опитваме да ги запълним. Всяка нова позиция за запълване има:

- или само един вече запълнен съсед (такива при този метод на запълване са позициите с ред или колона на номер 1 – мястото, където е разположен *N*);
- или два вече запълнени съседа (всички останали позиции).

Тук има едно интересно наблюдение, което позволява ускоряване на процеса на изчерпване. Позициите със само един запълнен съсед не са ограничени отгоре: ако съседът има стойност a, то всички $x = t^2 - a$, за естествени $t > \sqrt{a}$, които още не са използвани (а те са безброй много), теоретично могат да заемат това място. За тях трябва да разчитаме на добро начално ограничение (идеята то да бъде 10^{16} е абсолютно безумна). Що се отнася до останалите позиции (с по два вече запълнени съседа), оказва се, че даже теоретичните възможности за тях са краен брой, при това малко, даже често нула. Следващите разсъждения позволяват да избегнем голяма част от проверките в този случай.

Нека търсим естествено число x с два вече установени съседа a и b (без ограничение предполагаме $a<b$). Значи трябва да са изпълнени $x+a=t^2$ и $x+b=s^2$, за естествени x, t и s, $t<s$. Като извадим от второто равенство първото, получаваме $0<b-a=s^2-t^2=(s-t)(s+t)=c$. На това място вече е ясно, че решенията са краен брой, защото разлаганията на (b-a) на произведение от два множителя са краен брой. Като разлика от квадрати, c не може да дава остатък 2 при деление на 4, т.е. при $c=b-a\equiv 2 \pmod 4$ няма x, което да удовлетворява системата от двете диофантови уравнения. Иначе c се разлага на два множителя d и e, като $d=s-t$, $e=s+t$, $e>d$. Ако съберем двете равенства, получаваме $d+e=2s$, т.е. <u>d и e трябва да са *от една и съща четност*</u>. Тогава $s = \frac{d+e}{2} \Rightarrow t = e - s = e - \frac{d+e}{2} = \frac{e-d}{2}$.

Следователно $x = t^2 - a = \left(\frac{e-d}{2}\right)^2 - a = \frac{d^2+e^2}{4} - \frac{a+b}{2}$. Тъй като x е естествено, то:

1. Ако a и b са с еднаква четност, т.е. $\frac{a+b}{2} \in N$, e и d трябва да са четни (за да може сумата от квадратите им да се дели на 4);
2. Напротив, ако a и b са с различна четност, e и d трябва да са нечетни;
3. От $x>0$ следва $\frac{d^2+e^2}{4} > \frac{a+b}{2} \Rightarrow d^2+e^2 > 2(a+b)$. Но с d и e всъщност означихме двата множителя, на които се разлага разликата b-a, следователно $2de=2(b-a)$. Като извадим равенството от неравенството получаваме $(d-e)^2 > 4a \Rightarrow e-d > 2\sqrt{a} \Rightarrow d < e - 2\sqrt{a}$. Така ако оставим d да обхожда делителите на b-a със съответната четност в намаляващ ред (така решенията се получават в нарастващ ред), започвайки от $\left\lfloor \sqrt{b-a} \right\rfloor$, след като получим $e=(b-a)/d$, спираме да търсим решения, като се наруши условието $d < e - 2\sqrt{a}$. (Може и просто след изчисляване на x да проверим за $x>0$.)

Добре е при реализацията на това изчерпване да се направи предварителна схема на запълването. Бива да се вземе още предвид, че след симетрична размяна на елементите относно главния диагонал всички споразумения се запазват, квадратичният квадрат не губи свойствата си и, следователно, можем да считаме, че, например, $A_{12} < A_{21}$ (фиг. 1).

Предварително изчислени данни

Даже реализирано по този начин, изчерпването може да се окаже бавно за M=5 и по-малки стойности на N (да речем, под 1000). Всякакви методи могат да се използват за ускоряване на този процес, свързани обикновено с използване на повече памет, съхраняваща предварителни изчисления, ресурс, който ще стане невъзможно голям за големи N. Достатъчно се оказва даже само да запомним, да речем, числото в горния ляв ъгъл на оптималните квадрати за всеки от тези случаи.

Автор: Павлин Пеев