

## Amazing Race

(Решение)

Задачата трябва веднага да събужда в съзнанието на състезателите думи от рода на „граф“, „най-къс път“, „Dijkstra“ и така нататък. Всъщност точно това се иска и от тях – да образуват граф от дадените им задачи и финална точка и да намерят най-късия път от всеки от отборите до финала.

Разбира се, за да не отегчаваме състезателите с нещо толкова тривиално, сме дали изискване да завършат пътя с точно  $K$  на брой междинни върха. Как можем да осигурим това? Ами като „разширим“ графа – тоест разбием всеки връх на  $K$  върха – всеки от който ще отговаря на това „тъкмо свърших еди коя си задача, като вече съм минал еди колко си задачи“. Така в малко по-големия ни граф търсим път от отборите до финала минавайки през задачите като междинни върхове. За да си гарантираме, че няма да минем през отбор или финала и да го зачетем за задача няма да ги включваме във върховете. Всъщност графът ни ще се състои само от задачите. Така тръгваме от всяка задача с оставащи  $K$  задачи и искаме да намерим най-кратките пътища до всяка задача с оставащи  $0$  задачи. След като калкулираме това намираме разстоянието от всяка от задачите до финала – то трябва да бъде изминато от отборите след като завършат последната си задача. Накрая намираме и разстоянията от всеки от отборите до всяка от задачите с  $K$  оставащи задачи и така тази сума ни е отговора на задачата за всеки отбор. За най-къси пътища ще използваме алгоритъма на Дейкстра, и то без приоритетна опашка, тъй като графът ни е пълен и с нея той би се държал по-зле.

Това обаче може да е малко бавно – ако търсим най-късия път за всеки от отборите ще трябва да пуснем до  $T \leq 500$  Дейкстри. Всяка от тях е  $O(N * N)$  но в разширения граф това е  $O(N * K * N * K)$ . Затова ще направим следния „хак“ – вместо отборите да отиват до финала, финалът ще отива до отборите! Наистина, тъй като ребрата имат еднаква цена в двете посоки няма значение откъде накъде ще намираме пътя. Крайният резултат ще е еднакъв и в двата варианта. Така вместо 500 Дейкстри пускаме само една – от финала до всички останали върхове (съответно и до отборите). Така сложността на алгоритъма остава  $O(N * K * N * K)$ , което е напълно достатъчно за целите на задачата.

Автор: Александър Георгиев