# Анализ на задача *teams*

*Тагове: динамично програмиране, задача за раница*

## *Решение за 20 точки*

За 20 точки е достатъчно да пробваме всяка конфигурация отбори, да проверим дали сумата от уменията им е равна и да пазим някъде максималния интерес. Това можем да го направим с помощта на троична маска. Сложността излиза $O(N * 3^N)$.

## *Решение за 40 точки*

Нека сортираме учениците по популярността им. Разглеждаме всяка двойка ученици $(i, j), i < j$ и се пробваме да формираме отборите така, че учениците $i$ и $j$ да са капитани. Трябва да проверим дали е възможно от оставащите ученици да формираме отбори с баланс (абсолютната разлика от сумите на уменията) $S_j - S_i$. Това ще го правим с метода на динамичното програмиране.

Ще използваме булева таблица $pos[N][S]$, където $S = S_1 + \dots + S_N$. Клетката $pos[k][d]$ ще означава дали е възможно да постигнем разлика $d$ между сумата на отбора на $i$ и сумата на отбора на $j$, използвайки учениците от 1 до $k$. Можем да я попълним подобно на класическата задача за раницата. Накратко - разглеждаме 3 случая:

- $pos[k-1][d]$ - ученикът $k$ не е в нито един отбор
- $pos[k-1][d+S[k]]$ - добавяме ученика в отбора на $j$. От $d + S[k]$ разликата намалява на $d$. (тук разбира се внимаваме $d + S[k]$ да не излезе от паметта).
- $pos[k-1][d-S[k]]$ - добавяме ученика в отбора на $i$. От $d - S[k]$ разликата се увеличава на $d$. Този случай го разглеждаме **само когато** $k < i$. Това го правим, защото не искаме да добавяме към отбора на $i$, когато $k > i$, понеже искаме $i$ да е капитан.

Получаваме рекурентната формула (в някои случаи изпускаме някоя(или някои) от 3те клетки):

$$pos[k][d] = pos[k-1][d] \textbf{ or } pos[k-1][d+S[k]] \textbf{ or } pos[k-1][d-S[k]]$$

Базовият случай е $pos[0][0] = \textbf{true}$, а всички други клетки от ред 0 са **false** (единствената възможна разлика при 0 ученика е 0). Накрая остава да проверим дали $pos[n][S[j] - S[i]]$ е истина.

Остана един много важен детайл - как пазим отрицателни разлики. Това можем да го направим, като изместим цялата таблица със $S$. Така когато гледаме клетката $pos[k][d]$, всъщност става въпрос за разлика $d - S$ (тоест накрая ще проверим дали $pos[n][S + S[j] - S[i]]$ е истина).

Да анализираме каква е сложността на това решение. Ние обхождаме всяка двойка ученици, което ни дава $O(N^2)$, и за всяка двойка пускаме динамично, което има големина $O(N * S)$. Общо сложността е $O(N^3 * S)$.

## *Решение за 70 точки*

Отново сортираме учениците по популярност. Ще използваме таблицата $pos$ от предишното решение, за да можем лесно да знаем дали е възможно да формираме два отбора, съставени от учениците в някакъв префикс, с баланс $d$. Този път обаче вместо реалната разлика, ще пазим абсолютната разлика - тоест няма да се интересуваме кой ученик къде отива. Това улеснява формулата, защото не е нужно да отместваме таблицата със $S$, достатъчно е в случая, където взимаме $pos[k-1][d-S[k]]$ да вземем $pos[k-1][abs(d-S[k])]$. Таблица я попълваме веднъж в началото на програмата за всички ученици.

Вместо да фиксираме и двата капитана, нека фиксираме само този с по-малка популярност. Нека той е с номер $i$. След като сме го фиксирали, ще пуснем класическа раница, за да видим кои суми са възможни, използвайки учениците от $i+1$ до $N$. Тоест създаваме още една булева таблица $dp[N][S]$, като за нея имаме следната рекурентна формула:

$$dp[j][s] = dp[j-1][s] \textbf{ or } dp[j-1][s-S[j]]$$

Базовият случай е $dp[i][0] = 0$, понеже искаме да разглеждаме само учениците от $i+1$ нататък. Внимаваме със случая, когато $s - S[j] < 0$ да не излезем от паметта.

Още докато попълваме таблицата, да кажем сме намерили, че $dp[j][s]$ е **true**. Тогава ще се пробваме ученикът $j+1$ да стане капитан, като сумата от уменията на тези ученици от $i+1$ нататък, които са в отбора му, да бъде $s + S[j+1]$. Нека $d = abs(s + S[j+1] - S[i])$. Ако има разпределение, в което абсолютна разлика между сумите на уменията да е $d$ за отбори, в които участват ученици от 1 до $i-1$, то тогава можем да съставим отбори с капитани $i$ и $j+1$. Това можем да го проверим просто като видим каква е стойността в $pos[i-1][d]$.

Да анализираме сложността. Построяването на $pos$ става за време $O(N * S)$. След това за всяко $i$ от 1 до $N$ пресмятаме таблицата $dp$, което става за време $O((N-i) * S)$. Сумирайки по $i$ получаваме сложност $O(N^2 * S)$.

## *Решение за 100 точки*

Ще променим малко смисъла на таблицата $dp$, за да може да я смятаме само веднъж, а не $N$ пъти. По-удобно ни е да разглеждаме суфикс от ученици (тоест от някакво $i$ до $N$). $dp[i][s]$ ще пази каква е максималната популярност сред ученици от $i$ до $N$, които имат сума на уменията $s$. Рекурентната формула е:

$$dp[i][s] = max(dp[i+1][s], dp[i+1][s-S[i]])$$
$$dp[i][S[i]] = max(dp[i][S[i]], P[i])$$

Началните условия са за всяко $s$ от 0 до $S$, $dp[N+1][s] = 0$. Така ако някоя клетка е нула, ще знаем, че съответната сума е невъзможна. Не трябва да забравяме случая, когато сумата е съставена от умението на един ученик(точно това е вторият случай на формулата горе).

Аналогично на предишното решение попълваме и таблицата $pos$. След това я обхождаме и разглеждаме само клетките, които са истина. Да кажем, че сме на клетка $pos[i][d]$. Ще пробваме $i+1$ да бъде по-малкият капитан. От това, че $pos[i][d] = \textbf{true}$, можем да изберем ученици от 1 до $i$ в два отбора с баланс $d$. Нека $A$ е отборът с по-голяма сума от умения(ако са с равни суми, просто един от тях). Можем да добавим $i+1$ към $A$ и тогава разликата *сума на отбор A - сума на другия отбор* ще стане $d+S[i+1]$. В противен случай разликата ще стане $d-S[i+1]$. Втория случай го разглеждаме само когато $d - S[i+1] < 0$, защото искаме $i+1$ да е в отбора с по-голяма сума. И в двата случая имаме някакъв баланс $D$, който трябва да бъде коригиран като се вземат ученици в суфикса от $i+2$ до $N$. Трябва да изберем ученици, които ни дават сума точно

$D$, като от всички такива избори, да вземем капитан с възможно най-голяма популярност. Това вече е пресметнато в клетката $dp[i+2][D]$.

Сложността е еквивалентна на построяването на двете таблици, така че е $O(N * S)$.

*Автор: Велислав Гърков*