Панфлейта – Анализ

Подгрупа 1:

Тъй като К=1 (тоест има само един източник), можем да пресметнем отговора за всеки въпрос чрез формула. Нека единственият източник има индекс V. Ако i-тият въпрос пита за елемент X_i в момент T_i, то можем да забележим следното: първият момент, в който радиацията от източника ще достигне X_i, е $|V - X_i|$ (като в този момент стойността на X_i ще се увеличи също с толкова). От там нататък, всяка секунда до T_i, X_i ще се увеличава. Следователно, $X_i = |V - X_i| + (|V - X_i| + 1) + \cdots + T_i$. Нека означим $S(T) = 1 + 2 + 3 + \cdots + T - 1 + T = \frac{T*(T+1)}{2}$. Тогава имаме $X_i = S(T_i) - S(|V - X_i| - 1) = \frac{T_i*(T_i+1)}{2} - \frac{|V-X_i|*(|V-X_i|-1)}{2}$. Както се вижда, тази формула съдържа само константи (X_i, T_i, V, 1, 2). Това означава, че можем за всеки въпрос да изчислим с константа сложност O(1) да изчислим отговора.

Крайна сложност: Q

Подгрупа 2:

В тази подгрупа се цели решение, което по сложност зависи от N, K и максималното T, но не и от Q. С други думи, трябва да отговаряме на всяка заявка с константа сложност използвайки предварителни изчисления (precalculation). Тази подгрупа може да бъде взета от множество различни решения. Тук ще разгледаме 2 от тях:

Решение 1: Фиксираме стойността на T от 1 до T_{max} (максималната стойност на T измежду всички въпроси). За всяко фиксирано T, преминаваме през всичките N елемента и за всеки от тях разглеждаме всеки от K-те източници, смятайки с колко ще се увеличи елемент X_i в момент T_j. Така получаваме таблица с размер $N * T_{max}$. След това трябва да използваме префиксни масиви, за да можем веднага да отговорим с колко ще се увеличи дадена стойност събрано за всичките секунди от 1 до произволно T_i. *Крайна сложност:* $N * K * T_{max}$.

Решение 2: Можем да оптимизираме предната идея като променим начина на обхождане на елементите. За целта вместо за всяко T да

обхождаме всяко N и всяко K, можем да забележим, че всеки източник ще облъчи с радиация елементите на разстояние до T_{max} от него. Следователно можем да обходим за всеки от K-те източници елементите на разстояние до T_{max} както наляво, така и надясно, като по пътя попълваме стойностите на вече споменатата таблица с размери $N * T_{max}$.
Крайна сложност: $K * 2 * T_{max}$.

Подгрупа 3:

Решението на тази подгрупа се опира на идеята от първата подгрупа. За всяка една заявка, можем да обходим всички K източници и да видим точно с колко всеки един от тях ще повлияе на стойността на X_i (ако даден източник е на разстояние по-голямо от T_i, то „приносът“ му към увеличението на X_i очевидно ще е 0).

Крайна сложност: $K * Q$

Подгрупа 4:

Както по-опитните състезатели биха могли да преценят по ограниченията, тази подзадача предполага решение с логаритмични заявки (тоест сложност O($\log_2 N$) на заявка). Всъщност, решенията за тази подгрупа са по-сложни от предвиденото решение за 100т, поради което няма да бъдат обсъдени в рамките на този анализ – такива решения биха използвали структури от данни като сегментно дърво или дърво на Фенуик. Тази подзадача беше добавена само за да даде възможност на състезателите, които знаят подобни структури, да изпъкнат, в случай че не успеят да измислят пълното решение.

Възможни сложности: $(N + Q) * log_2 N$ *или* $N + Q * log_2 N$

Подзадача 5:

Време е да разгледаме пълното решение на тази задача. Както първата подгрупа, това решение цели да отговори на всеки въпрос с константа сложност използвайки формула. Трудността идва от това да се досетим как да изчислим влиянието на множество от източници върху даден елемент. За да решим този проблем, ще използваме малко математика:

Нека разглеждаме всички източници с индекси V_j, които се намират вляво от въведеното X_i за сегашния въпрос (тоест $V_j < X_i$). Ако приемем, че даден източник е съседен на X_i (тоест $X_i - V_j = 1$), то тогава приносът P_j на този източник би бил $\frac{T_i*(T_i+1)}{2}$ (нека за простота въведем означението $C = \frac{T_i*(T_i+1)}{2}$). В действителност, обаче, източниците почти никога няма да са точно съседни на X_i. Тогава можем да коригираме стойността P_j като извадим всички стойности, които сме добавили без да е трябвало – а именно числата от 1 до $(X_i - V_j - 1)$, които имат сбор $\frac{(X_i-V_j-1)*(X_i-V_j)}{2}$. Нека този сбор означим чрез F_j.

Дотук имаме $P_j = C - F_j$. Разкривайки скобите в F_j получаваме:

$$F_j = \frac{1}{2}(X_i^2 - 2 * X_i * V_j - X_i + V_j^2 + V_j).$$

Очевидно крайният отговор на въпроса би бил сумата от приносите на всеки източник, тоест $AnsLeft_i = \sum P_j$ за всяко j такова, че $V_j < X_i$ е индекс на източник и $X_i - V_j \leq T_i$. Нека имаме M на брой такива източници. Тогава получаваме:

$$AnsLeft_i = M * C - \frac{M}{2}\left(X_i^2 - X_i\right) - \frac{1}{2}\sum\left(V_j^2 - V_j(2 * X_i - 1)\right).$$

Тъй като X_i и C са константи за дадения въпрос, остава да открием бързо стойността M, както и сумата на всички V_j^2 и V_j. *Всичко това може да бъде пресметнато чрез префиксни масиви!*

Още при самия вход, където въвеждаме индексите на източниците, можем да добавяме единици на тези позиции в първи масив. След това превръщаме този масив в префиксен, като го обходим и последователно във всяка клетка запазим сумата на всички предишни елементи (да припомним, че за префиксен масив важи зависимостта $pref_i = pref_{i-1} + a_i$ за някакви стойности a_i). По този начин можем да пресметнем M, защото той е просто разликата в броят източници между първите X_i елемента и първите $X_i - T_i - 1$ елемента. По аналогичен начин можем да пресметнем сумата на всички V_j и ${V_j}^2$, като на съответните индекси още при входа добавяме в отделни масиви съответно V_j и ${V_j}^2$, след което превръщаме и двата масива в префиксни.

В крайна сметка, ако означим с A и B съответно сумите на допустимите V_j и ${V_j}^2$, получаваме формулата:

$$AnsLeft_i = M * C - \frac{M}{2}\left(X_i^2 - X_i\right) - \frac{1}{2}(B - A * (2 * X_i - 1))$$

Важно е да отбележим, че тази формула работи само ако няма източник **във** самият X_i. За щастие, това се коригира лесно: просто към отговора добавяме $R = L * C$, където L е броят източници с индекс X_i. Очевидно, ако няма такива източници, то $L = 0$ и оттам $R = 0$, което не повлиява на отговора.

Следователно, финалната формула има вида:

$$AnsLeft_i = (M + L) * C - \frac{M}{2}\left(X_i^2 - X_i\right) - \frac{1}{2}(B - A * (2 * X_i - 1))$$

Сега трябва да разгледаме и индексите отдясно на X_i, което също става лесно. Можем да разпишем формулите по аналогичен начин и да достигнем до много подобната формула за отговор:

$$AnsRight_i = M * C - \frac{M}{2}\left(X_i^2 + X_i\right) - \frac{1}{2}(B - A * (2 * X_i + 1))$$

Стойностите на $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ са различни в двата случая!

Накрая получаваме, че отговорът за даден въпрос е:

$$Ans_i = AnsLeft_i + AnsRight_i$$

Крайна сложност: N + Q

Автори: Преслав Тошев, Калоян Върбанов