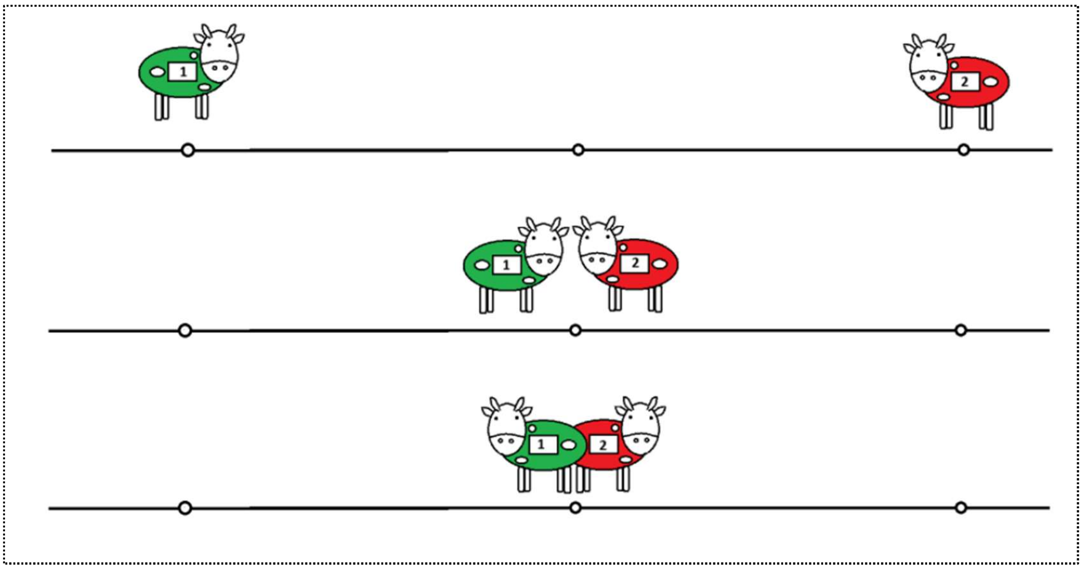
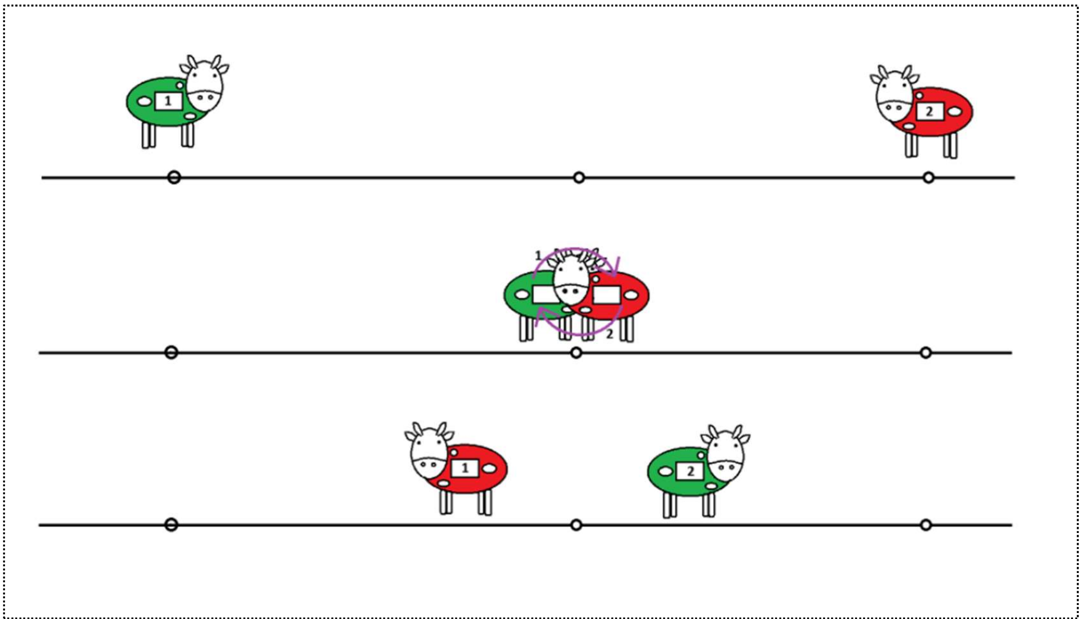
Анализ на задача madcows

Задачата е построена върху стандартната постановка от „сблъскващи се“ обекти, които се движат с еднаква постоянна скорост.

Удобна интерпретация е следната – нека в началния момент на тръгването на всяка крава закачим табелка със съответния ѝ номер. Въпросът „Къде се намира C[i]-тата крава?“ ще тълкуваме като „Къде се намира кравата, която носи табелката с номер C[i]?“. Тук идва хитрата ни измяна на условието - когато две крави се срещнат, вместо да се изплашат една от друга и да си обърнат посоките, ще считаме, че те се разминават и едновременно с това си сменят табелките с номерата. Така табелките ще вървят по същите траектории както кравите в оригиналната задача. Оттук нататък в анализа ще се придържаме към точно тази интерпретация.

Следните две схеми са за нагледност, току-що трансформирахме задачата от първата във втората симулация.

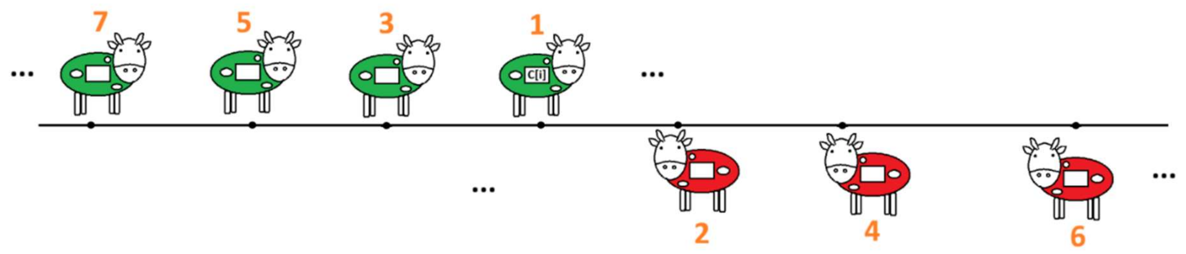




Сега вече е много лесно да проследим дадена крава къде се намира във всеки момент от времето, но трудната част е да разберем в този момент коя крава носи табелката, за която питаме.

Два частни случая се решават директно – ако всички крави вървят в положителната посока, или ако всички крави вървят в отрицателната посока, тогава никога няма да има разминаване на две крави – следователно табелката с номер C[i] ще е в кравата C[i] през цялото време. Тогава отговорът на всяка заявка е (C[i] + D[C[i]] * T[i]) mod L.

В общия случай имаме две групи крави – едните се движат само в положителна посока (ще я наричаме за улеснение надясно), а вторите се движат само в отрицателна посока (ще я наричаме наляво). Ако една табелка започне в крава, движеща се надясно, то първото ѝ прехвърляне ще бъде в най-близката крава отдясно на началната, която се движи наляво, после следващото прехвърляне ще бъде в предишната крава, която се движи надясно, после в следващата крава, която се движи наляво и т.н. За нагледност на схемата зелените крави се движат надясно, червените наляво, и оранжевите числа показват последователността, в която кравите си прехвърлят табелката C[i].



Този процес на прехвърляне продължава безкрайно, така че от нас се изисква да кажем за колко прехвърляния е достатъчно времето T[i], за да можем така да идентифицираме в коя крава е табелката. Ползваме следното наблюдение:

1) Прехвърлянето 1->2 става след толкова на брой секунди, колкото е половината разстояние между кравите с оранжеви числа 1 и 2 (по средата между двете крави).
2) Между прехвърлянията x -> x+1 и x+1 -> x+2 минават толкова на брой секунди, колкото е половината разстояние между кравите с оранжеви числа x и x+2 в съответната посока спрямо ориентацията им. Това е най-трудното и най-важното наблюдение за решението на задачата! То е вярно, защото в момента на прехвърлянето x -> x+1 кравите с оранжеви числа x и x+1 са подравнени (в една и съща координата), и тъй като всички крави, движещи се надясно, запазват разстоянията помежду си, и всички крави, движещи се наляво, също запазват разстоянията помежду си, то разстоянието между кравите с оранжеви числа x+1 и x+2 в този момент е същото като фиксираното разстояние между кравите с оранжеви числа x и x+2, които се движат винаги в една и съща посока.
   Пример: Ако имаме три крави с координати 2, 6 и 8, първите две се движат надясно и третата се движи наляво, и се опитваме да следим табелката на кравата в позиция 6, забелязваме следното:
   - Първата смяна е с третата крава в координата 7 след 1 секунда, което е половината от разстоянието между тях. В този момент координатите на трите крави са съответно 3, 7 и 7. Сега табелката е вече в третата крава;
   - Втората смяна е от третата на първата крава в координата 5 след 2 секунди, тъй като отсечката между тях е с дължина 4 = 7 - 3 = 6 - 2 = разликата в началните две координати на движещите се надясно крави.

С тези наблюдения сме готови да решим задачата за 100 точки. Едно възможно решение е двоично търсене по отговора, като търсим броя прехвърляния, които табелката на крава C[i] ще претърпи за време T[i]. За всяко предположение X можем да изчислим колко време ще измине до X-тата размяна:

1) Първата размяна става за толкова секунди, колкото е половината разстояние до следващата крава, движеща срещуположна посока.
2) Останалите X-1 размени се разделят на две групи – четни и нечетни. Времената за едните отговарят на половинки разстояния между надясно движещи се крави, а за другите - на половинки разстояния между наляво движещи се крави. Както установихме от картинката по-горе, тези разстояния са винаги последователни, фиксирани още от инициализацията стойности, но заради цикличността някои могат да се броят повече от веднъж. Сметката може да се изчисли чрез масив, пазещ префиксните суми от тези междинни разстояния.

Решението, до което достигнахме, изглежда така:

- Отделяме кравите в две групи според посоката (сортирани по начална позиция);
- За всяка крава намираме коя е първата от срещуположната посока, с която ще се размине и на която ще даде табелката (съответната с оранжев номер 2 на нашите чертежи)
- В двете групи поотделно изчисляваме разстоянията между съседните крави и ги запазваме с префиксен масив за сумиране, за да намираме за O(1) сума на интервал от тях.
- За всяка заявка започваме двоично търсене по броят прехвърляния на табелката - намираме съответните индекси на първоначалната крава в нейната група, индексът на най-близката крава в срещуположната група, за X прехвърляния сумираме половината разстояние между първите две и сумата на двата „интервала“ от (X-1)/2 разстояния в единия и другия масив от разстоянията между кравите
- След като знаем колко прехвърляния са се случили в рамките на заявката, то изчисляваме чрез индексите в коя крава е отишла табелката с номер C[i], и като резултат на заявката връщаме координатата на точно тази крави след T[i] секунди.

Ще споменем още няколко разсъждения, които са полезни в подзадача 4, и които водят до още едно решение на задачата, измислено от Енчо Мишинев.

След точно L секунди кравите ще бъдат по първоначалните си места, но номерата ще са се прехвърлили по някакъв произволен начин. Нека номерът S е отишъл при крава A[S], където A[0], A[1], …, A[N-1] е пермутация на числата от 0 до n-1. В следващата итерация от L секунди, тъй като кравите ще се движат по същия начин, номер S ще бъде премествян като номерът A[S] в първата итерация, тоест след 2*L секунди номер S ще бъде в крава A[A[S]], и т.н.

Още едно важно наблюдение – през цялото време вдясно от табелка с номер x е непосредствено табелка с номер x+1. Това е вярно, защото при всяко разминаване табелките се разменят и съответно запазват относителната си подредба. Това означава, че пермутацията A[0], A[1], …, A[N-1] е всъщност някоя циклична подредба s+1, s+2, …, N, 1, 2, …, s.

Следващо наблюдение – за всеки един момент T можем бързо да изчисляваме колко табелки се намират в даден интервал от позиции [a, b] – този въпрос е еквивалентен на това да питаме в момент 0 колко на брой крави, движещи се надясно, са в интервала [a-T, b-T], и колко на брой крави, движещи се наляво, са в интервала [a+T, b+T] (тук отново границите са по модул L, което също означава, че интервала може и да се разцепи на две части в нормалния си запис, ако пресича координатата 0=L, например [-5, 5] означава [L-5, L)и[0, 5]).

Четвърто наблюдение – ако знаем позицията X на табелка 1, то с двоично търсене можем да намерим позицията на всяка табелка S чрез третото наблюдение и въпроси от вида „В интервала [X, Y] има ли поне s табелки?“. Всъщност, още по-обобщено – ако знаем позицията на която и да е табелка R, с правилно изчисляване на разликата в индексите отново можем да намерим за O(log L) координатите на конкретна табелка.

Тези наблюдения ни позволяват да построим следното решение:

Във фазата на инициализирането, симулираме за един времеви период с дължина L където се случват размените на табелка 1, които са O(N) на брой. Накрая проверяваме колко е големината на цикличното отместване на табелките след L хода, като виждаме на мястото на чия табелка е отишла първата. За всяка заявка след това изчисляваме колко периоди са минали с формулата cnt = T[i]/L, после изчисляваме чрез известното ни отместване за един период в момент cnt*L коя табелка R е на мястото на табелката с номер 1, и накрая в структурата за симулацията на размените на табелка 1 виждаме какъв маршрут ще измине табелката R за останалото време T[i]%L. Така ще знаем позицията на една табелка в момент T[i], и чрез двоичното търсене от четвъртото наблюдение ще намерим и позицията на табелката C[i], за която всъщност ни питат.