

Задача С3. СУМА НА ДЕЛИТЕЛИТЕ

Решението се основа на следната

Теорема: Ако разлагането на цялото число $n \geq 2$ на прости множители е

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m},$$

където p_1, p_2, \dots, p_m са различни прости числа и k_1, k_2, \dots, k_m са съответните кратности, то сумата от делителите на n е

$$s = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{k_1}) \cdot (1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{k_2}) \dots (1 + p_m + p_m^2 + \dots + p_m^{k_m})$$

Доказателство: Всеки делител на n има вида $d = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_m^{r_m}$, където

$$1 \leq r_1 \leq k_1, \quad 1 \leq r_2 \leq k_2, \quad \dots \quad 1 \leq r_m \leq k_m.$$

След разкриване на скобите се получава точно сумата на всичките делители на числото n .

В програмата реализираме решето на Ератостен за числата от 2 до 10^7 , като в `p[i]` получаваме най-малкия прост делител на i , а във вектора `primes` получаваме списък на всички прости числа от 2 до 10^7 .

След тази подготовка функцията `least_prime_factor(x)` връща коректно най-малкия прост делител на число x от интервала $[2, 10^{14}]$.

С помощта на функцията `vector<long long> prime_factors(long long x)` получаваме списък на простите множители на x , като всеки множител присъства в списъка толкова пъти, колкото е неговата кратност.

Остава да отделим различните прости множители, да определим техните кратности и да приложим теоремата.

Стоян Капралов