маймунка

1 Подзадача с еднакви цифри

Нека p е вероятността да напишем правилен символ.
Нека e_x е очакваната стойност за да се напишат x символа.
За да напишем $x+1$ символа, трябва да напишем x символа и след това да напишем правилния. Ако не го напишем, тогава започваме отново. Това означава, че

$$e_{x+1} = 1 + e_x + (1-p) \cdot e_{x+1}$$

И от там намираме

$$e_{x+1} = \frac{1+e_x}{p}$$

като $e_1 = \frac{1}{p}$

2 Подзадача с първа различна

Единствената разлика с първата подзадача е че трябва да се стигне до първия символ, което отнема допълнително $\frac{1}{1-p}$ натискания

3 Пълно решение

Нека променим нотацията: e_x е очакваната стойност за броя натискания които още трябват ако вече сме написали x символа, а p е вероятността да напишем следващия символ правилно. Ако разпишем вероятностите, получаваме уравнения от вида

$$e_x = 1 + p \cdot e_{x+1} + (1-p) \cdot e_t$$

където $t \leq x$ е позицията, на която се връщаме ако напишем грешен символ. По дефиниция $e_N = 0$ и търсим $e_0 = a$. Чисто с тези формули може да се използва гаусов метод за решаване на линейни уравнения, $O(n^3)$.
За по-добро решение можем да изразим всички очаквани стойности като $a + B_i$, където $B_0 = 0$. Тогава от горната формула получаваме

$$B_{x+1} = \frac{B_x - (1-p) \cdot B_t - 1}{p}$$

Така намираме, че $e_N = 0 = a + B_N$, тоест $a = -B_N$.
Остава само да намерим за всяка позиция x на коя позиция t ще се върне ако напише грешен символ. Наивна имплементация на това ни дава $O(n^2)$ решение, ако сравним всеки възможен подниз с началото.
За по-бързо решение, нека разгледаме префиксната функция на низа, π. От x се връщаме или на позиция $\pi(x)+1$, когато $s_{\pi(x)+1} \neq s_{x+1}$, или на позицията на която се връща $\pi(x)$ в другия случай. Префиксната функция може да се намери за $O(n \log n)$ с хеширане или $O(n)$ с KMP.

Автор: Михаил Банков