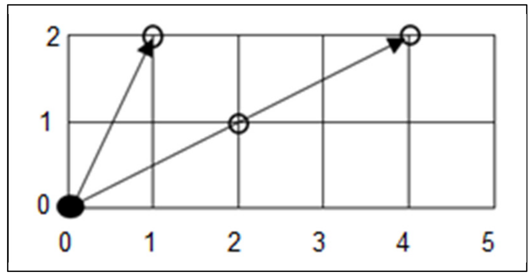
ЗАДАЧА D1. ТОЧНИ ИЗСТРЕЛИ



Преди да обсъдим възможните решения на задачата, нека направим следното наблюдение. Ако стреляме към мишената с такива координати (i, j), че i и j са взаимно прости, т.е. НОД$(i, j) = 1$, тогава единствената мишена, която ще регистрира попадение е мишената с координати (i, j). Така например, за $M = 3$ и $N = 6$, при точен изстрел към мишените с координати (1, 2), (3, 2) и (5, 2) ще бъде отчетено попадение само в тези мишена. Нека НОД$(i, j) = d > 1$. Тогава при точен изстрел към мишената с координати (i, j), изстрелът първо ще бъде регистриран от мишената с координати $(i/d, j/d)$, тъй като НОД$(i/d, j/d) = 1$, след това от мишените с координати $(2i/d, 2j/d)$, $(3i/d, 3j/d)$, . . ., $(d.i/d, d.j/d) = (i, j)$. Значи, за да бъде „поразена“ всяка от тези мишени, ще бъде достатъчен изстрелът към мишената с координати $(i/d, j/d)$. Така например, при изстрел към мишената с координати (2, 1) ще бъде отчетено попадение, както в нея, така и в мишената с координати (4, 2) (виж на фигурата) и изстрел към (4, 2) не е необходим.

Получаваме следния ad hoc алгоритъм: преброяваме тези от двойките (i, j), за които е в сила $1 \le i < M$, $1 \le j < N$, НОД$(i, j) = 1$ и добавяме двата изстрела към мишените с кординати $(0, N-1)$ и $(M-1, N-1)$. Сложността на това решение е $O(M.N)$.

За да направим по-бърз алгоритъм, нека първо отчетем симетричността на решението за случаите $M \le N$ и $N \le M$. Това ни позволява, ако $N \le M$, да разменим стойностите на M и N и да разгледаме само случая $M \le N$.

Сега можем да направим следното наблюдение: за всяко i от 1 до $M-1$ редицата:

НОД$(i, 1)$, НОД$(i, 2)$, НОД$(i, 3)$, . . ., НОД$(i, N-1)$

е периодична, с дължина на периода i. Т.е. първите ѝ i члена се повтарят P пъти, където $P = (N-1)/i$. Така, ако броят на единиците в първите ѝ i члена е B_i, тогава в повтарящите се цели периоди ще има $P.B_i$ единици. Остава да намерим броя C_i на единиците в оставащите $Q = (N-1)\%i$ члена на редицата. Сумираме получените за всеки ред стойности $P.B_i + C_i$ и добавяме двата изстрела към мишените с кординати $(0, N-1)$ и $(M-1, N-1)$. Така получаваме алгоритъм със сложност $O(M^2)$, който при стойности на M по-малки от N ще бъде по-бърз (колкото по-малко е M толкова повече) от ad hoc алгоритъма.

Този алгоритъм може да се ускори още повече, ако при проверката за кои мишени с координати (i, j), $j = 1, 2, \ldots, i$, е в сила НОД$(i, j) = 1$, запомняме в j-тия елемент на помощен масив `row` колко единици сме срещнали до момента. Тогава C_i = `row[Q]`.

Красимир Манев