

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ИНФОРМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ, 11-13 март 2022 г.
Група АВ, 9 – 12 клас

Задача АВ5. GCD 2.0

Започваме със множество $S = \{a_1, \dots, a_N\}$ (стойностите a_1, \dots, a_N са различни). Трябва да поддържате 2 вида заявки:

1. Добавете x към множеството ($S := S \cup \{x\}$). Гарантирано е, че $x \notin S$.
2. Премахнете x от множеството ($S := S \setminus \{x\}$). Гарантирано е, че $x \in S$.

Интересуваме се от сумата на най-големите общи делители на всички **непразни** подмножества на S . Ще бележим тази стойност с $f(S) = \sum_{Q \subseteq S, |Q| > 0} \gcd(Q)$, където $\gcd(Q)$ е най-големият общ делител на елементите в Q . Ако множеството S е празно, $f(S) = 0$.

Вашата задача е да намерите $f(S)$ за началното множество, както и $f(S)$ след всяка заявка. По-конкретно, интересуваме се от остатъка на тези суми при деление на $10^9 + 7$, тъй като те могат да бъдат твърде големи. Напишете програма `gcd2.cpp`, която изпълнява горепосочените заявки.

Вход

От първия ред на стандартния вход се въвеждат две числа N и Q – броя на числата в началното множество и броя на заявките. Вторият ред съдържа N числа, разделени с интервали – a_1, \dots, a_N . От следващите Q реда се въвежда информация за заявките, във формата на две числа разделени с интервал t и x . Ако $t = 1$, заявката е за добавяне на x към S . В противен случай, $t = 2$ и заявката е за премахване на x от S .

Изход

На стандартния изход отпечатайте $Q + 1$ реда, съдържащи стойностите на $f(S)$ за началното множество и след всяка заявка.

Ограничения

$$0 \leq N, Q \leq 2 \times 10^5$$
$$1 \leq a_i, x \leq 2 \times 10^6$$

Подзадачи и оценяване

Подзадача	Точки	$N \leq$	$Q \leq$	$a_i, x \leq$
1	5	10	10	2×10^6
2	12	2×10^5	0	2×10^6
3	13	0	3000	3000
4	12	0	2×10^5	3000
5	28	0	2×10^5	10^5
6	30	2×10^5	2×10^5	2×10^6

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ИНФОРМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ, 11-13 март 2022 г.
Група АВ, 9 – 12 клас

Примерен тест

Вход	Изход
3 3	24
2 4 8	16
2 2	48
1 16	94
1 39	

Примерен тест

- $S = \{2,4,8\}$
 $f(S) = \gcd(\{2\}) + \gcd(\{4\}) + \gcd(\{8\}) + \gcd(\{2,4\}) + \gcd(\{2,8\})$
 $+ \gcd(\{4,8\}) + \gcd(\{2,4,8\}) = 2 + 4 + 8 + 2 + 2 + 4 + 2 = 24$
- $S = \{4,8\}$
 $f(S) = \gcd(\{4\}) + \gcd(\{8\}) + \gcd(\{4,8\}) = 4 + 8 + 4 = 16$
- $S = \{4,8,16\}$
 $f(S) = \gcd(\{4\}) + \gcd(\{8\}) + \gcd(\{16\}) + \gcd(\{4,8\}) + \gcd(\{4,16\})$
 $+ \gcd(\{8,16\}) + \gcd(\{4,8,16\}) = 4 + 8 + 16 + 4 + 4 + 8 + 4 = 48$
- $S = \{4,8,16,39\}$
 $f(S) = \gcd(\{4\}) + \gcd(\{8\}) + \gcd(\{16\}) + \gcd(\{39\}) + \gcd(\{4,8\}) + \gcd(\{4,16\})$
 $+ \gcd(\{4,39\}) + \gcd(\{8,16\}) + \gcd(\{8,39\}) + \gcd(\{16,39\}) + \gcd(\{4,8,16\})$
 $+ \gcd(\{4,8,39\}) + \gcd(\{4,16,39\}) + \gcd(\{8,16,39\}) + \gcd(\{4,8,16,39\})$
 $= 4 + 8 + 16 + 39 + 4 + 4 + 1 + 8 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 94$