

### **divisors0 и divisors1**

Най-лесното решение е за всеки префикс да питаме за всички негови делители. От страна на имплементация обаче е по-лесно за всеки потенциален период да питаме за всички префикси с дължина кратна на периода. Това решение изкарва само 6 точки, но с една лесна оптимизация стига до 13 точки: разглеждаме възможните периоди във възходящ ред и не питаме за префикси с вече открити периоди.

### **divisors2**

Нека дефинираме „частичен“ период по същия начин като период, но без изискването за делимост. Лесно се вижда (от дефиницията), че ако позиция  $L$  има частичен период  $P$ , то и всички позиции преди  $L$  също го имат. Следва, че ако позиция  $L$  няма частичен период  $P$ , то и всички позиции след  $L$  също го нямат. Също така забележете, че ако позиция има период  $P$ , то тя има и частичен период  $P$ .

От горните наблюдения можем да видим, че ако позиция  $kP$  няма период  $P$ , то и позиция  $(k + 1)P$  също няма да има период  $P$ . Следва, че можем да разглеждаме позициите  $2P, 3P, \dots$  във възходящ ред и, когато стигнем до  $kP$ , което няма период  $P$ , можем да прекъснем търсенето. Това решение ни носи 47 точки.

### **divisors3**

Нужното наблюдение тук е, че ако позиция  $P$  има период  $Q < P$ , то  $P$  не е минималният период на никоя следваща позиция, т.е. можем да не правим търсене за период  $P$ . Това е защото, ако следваща позиция  $kP$  има период  $P$ , тя със сигурност ще има и период  $Q$ . Това решение получава 69 точки.

### **divisors4**

Нека позиция  $kP > P$  има минимален период  $P$ . Следва, че всички позиции до  $kP$  имат частичен период  $P$ . Сега, нека разгледаме позиция  $tQ$  между  $Q + P$  и  $kP$ , за която твърдим, че има минимален период  $Q$ . Тя обаче има и частичен период  $P$ . Лесно се вижда, че от това следва следното:  $tQ$  има период  $\gcd(Q, P)$  (може да се опитате да си напишете контрапример). Ако  $Q$  не дели  $P$ , то  $\gcd(Q, P) < Q$ , която е противоречие, защото приехме, че  $Q$  е минималният период на  $tQ$ . Следва, че  $Q$  трябва да дели  $P$ . От това обаче следва, че позицията  $P$  трябва също да има период  $Q$  (тъй като  $P \leq tQ$  и  $tQ$  има частичен период  $Q$ ,  $P$  също има частичен период  $Q$ ). Но това води до противоречие по съображенията направени в предното решение. Заклучваме, че никоя позиция между  $2P$  и  $kP$  няма минимален нетривиален период  $Q \neq P$ .

Сега нека да приемем, че позиция  $sQ > Q$  има период  $Q$ , такъв че  $P < Q < (k - 1)P$ . Разглеждаме следните варианти. Първо, ако  $2Q \leq kP$ , стигаме до противоречие от горния тип на позиция  $2Q$ , защото  $2Q > P + Q$ . Второ, ако  $kP \leq 2Q$ , стигаме до противоречие на позиция  $kP$  (с ролите на  $Q$  и  $P$  разменени), защото  $kP = (k - 1)P + P > Q + P$ . Така заключваме, че винаги се стига до противоречие, т.е. никоя позиция не може да има период  $Q$  между  $P$  и  $(k - 1)P$ . (Забележете, че случаят  $Q = (k - 1)P$  бива изключен още от съображенията направени в предното решение.)

Стигаме до следното решение: правим това, което прави и `divisors3`, но когато прекъснем търсенето за период  $P$  с финална открита позиция  $kP$ , следващият период, който разглеждаме, не е  $P + 1$ , ами е  $(k - 1)P + 1$ . Това решение изкарва 84 точки.

## Анализ на divisors4

Нека сега анализираме броя заявки, които това решение извършва. В началото си „заделяме“  $N/2$  заявки, по една за всеки възможен период. Когато разглеждаме период  $P$ , който е минимален на позиция  $kP$ , използваме общо  $k$  заявки, но пък елиминираме всички периоди до  $(k - 1)P$ , както и  $kP$  (поради съображенията направени в предното решение). При  $k = 1$ , единственият ново-елиминиран период е  $P$ , но това е в „бюджета“ ни, защото за него има заделена една заявка. При  $k \geq 2$ , общата бройка ново-елиминирани периоди е  $(k - 1)P + 1 - (P - 1) = (k - 2)P + 2 \geq k$ , т.е. отново се придържаме към бюджета си. Всичко това ОБАЧЕ се случва само докато текущата позиция е преди  $N/2$ , защото иначе няма периоди за елиминиране. Ако няма нетривиални периоди след позиция  $N/2$ , това не е проблем и се побираме в заделените си  $N/2$  заявки.

Сега нека разгледаме случая да има нетривиален период  $P$  след позиция  $N/2$ . Това значи, че не може да има други нетривиални периоди след него. В най-лошия случай са ни трябвали  $P + N/P - 2$  заявки за целия масив. Първите  $P - 1$  се използват преди достигане на периода  $P$  (най-лошият случай е всички периоди преди  $P$  да са единици), а следващите  $N/P - 1$  – след това (най-лошият-случай е да питаме за всяка кратна на  $P$  позиция след  $P$ ).

Лесно се вижда, че тази функция на  $P$  е изпъкнала, т.е. максимумът ѝ в някакъв интервал е равен на стойността ѝ в един от двата края на интервала. Ясно е, че  $P \leq N/2$ . Следва, че това решение прави не повече от  $N/2$  заявки, ако приемем, че  $P \geq 2$ . За жалост при  $P = 1$ , то може да достигне  $N - 1$  заявки. Т.е. лошият му случай е, когато над половината от масива има период равен на едно.

## divisors5

Горният анализ ни показва, че предното решение се „чупи“ в само един много конкретен клас от случаи. Най-лесното решение на този проблем веднага трябва да ни е очевидно: като първа заявка ще проверим дали сме в лош случай, т.е. ще проверим дали позиция  $N/2$  има период равен на едно. Ако не, то не сме в лош случай и можем да процедираме както преди. Ако да, то знаем, че всички позиции до  $N/2$  имат единичен период и остава линейно да проверим за всички следващи (общо  $N/2$  заявки за тази дясна част). И в двата случая правим не повече от  $N/2 + 1$  заявки. Това е пълното решение.

## Динамично програмиране

Едно частично решение, предложено от Радослав Димитров, се базира на идея напояща на динамично програмиране. Ако позиция  $kP > P$  има минимален период  $P$ , то и позиция  $(k - 1)P$  трябва да има минимален период  $P$ . Така можем да инициализираме периодите на всички позиции да са равни на самите им индекси. След това, когато достигнем до позиция  $L$  (по индукция) вече знаем минималният ѝ период  $P$ . Остава да проверим дали това е период и на позиция  $L + P$  и, ако да, ъпдейтваме периода ѝ. Забележете, че преди това ъпдейтване (преди проверката дори) текущият минимален период на  $L + P$  винаги ще е равен на  $L + P$ , т.е. никога няма да ъпдейтваме дадена позиция над веднъж. Това позволява ъпдейта да е просто присвояване на стойността на  $P$ , а не ъпдейтване като минимума на  $P$  и предишната стойност. Това е следствие на наблюденията ни за divisors4, но тук не се възползваме от тях и затова това решение не е толкова добро. То изкарва 69 точки, а с оптимизация подобна на тази за divisors5 – 83 точки.

### Долна граница

Вече разгледахме как да решим задачата, но дали това наистина е най-доброто възможно решение? Можем ли да покажем, че не е възможно да съществува по-добро решение? Ами, почти! Можем лесно да покажем долна граница от  $N/2$  заявки. Да разгледаме следния случай: има не повече от една позиция с нетривиален период. Очевидно тази позиция трябва да е четна (периодът се повтаря точно два пъти), но не можем да заключим нищо повече за нея. Следва, че не можем да я намерим по по-ефикасен начин от това да питаме за всички четни позиции  $2P$  дали имат период  $P$ . Това отнема  $N/2$  заявки за тази опростена версия на пълната задача, т.е. и пълната задача не може да се реши в под  $N/2$  заявки. Разумно е да допуснем, че по-сложната пълна задача изисква поне още една допълнителна заявка (общо  $N/2 + 1$ ), в който случай нашето решение би било оптимално, но нямаме доказателство за това. Във всички случаи то е много близо до оптимално.

Автор: Емил Инджев

Начална идея: Радослав Димитров