Минимална денивелация

Нека първо разгледаме как можем да пресметнем оптималната денивелация, игнорирайки сумата от височините.

Идеята е да сложим ограничения за позициите на върховете и доловете спрямо точките с известни позиции. Нека разгледаме произволен връх/дол a_i, чиято височина не е известна:

- Точките с известни височини наляво от a_{i-1} и надясно от a_{i+1} не влияят на a_i
- Ако имаме точка на позиция $a_{i-1} \leq x \leq a_{i+1}$, с известна височина h_x, то понеже точките трябва да са на целочислени височини, получаваме ограничението:
    - $h_{a_i} \geq h_x + |a_i - x|$ ако a_i е връх
    - $h_{a_i} \leq h_x - |a_i - x|$ ако a_i е дол

Тъй като за даден връх/дол всички ограничения са неравенства в една и съща посока, то е лесно да ги заменим с по едно ограничение за връх/дол, като намерим най-строгите за всеки. Тогава можем да дефинираме L_i и U_i за всеки връх/дол така че всички ограничения за задачата да са просто $L_i \leq h_{a_i} \leq U_i$ за $1 \leq i \leq T$. Считаме, че $L_i = -\infty$ и $U_i = \infty$, ако няма ограничения в съответната посока за съответния връх/дол. За връх/дол с известна височина считаме $L_i = U_i = h_{a_i}$

Всички стойности L и U можем да пресметнем за $O(T)$ или $O(N)$ използвайки подходящо обхождане в двете посоки от всеки връх/дол.

Тъй като това са необходими ограничения, то можем да заключим, че денивелацията е **поне**

$$\max_{1 \leq i \leq T} L_i - \min_{1 \leq i \leq T} U_i$$

Казано неформално, денивелацията трябва да е поне толкова колкото разликата между най-високото долно ограничение за даден връх и най-ниското горно ограничение за даден дол.

Нека си представим, че слагаме всеки неизвестен дол на височина $U_{min} = \min_{1 \leq i \leq T} U_i$ и всеки неизвестен връх на височина $L_{max} = \max_{1 \leq i \leq T} L_i$. Ако между дадени връх и дол е имало поне една точка с известна височина, то ограниченията създадени от нея гарантират, че има място да бъдат нанесени и останалите точки между тях. Възможно е обаче между връх и дол да е нямало точки с известни височини, в който случай нямаме ограничение за това колко близко са те и дали има място да бъдат нанесени всички точки между тях. Затова е ясно също, че денивелацията е **поне**

$$D_{max} = \max_{1 \leq i < T} (a_{i+1} - a_i)$$

По описаната конструкция за разполагане на точките, вече лесно се вижда че можем да конструираме валиден релеф с денивелация $\max(L_{max} - U_{min}, D_{max})$. Тъй като това е нужно и достатъчно ограничение, тази стойност е минималната денивелация и решава първата част от задачата

Минимална сума на височините при известна минимална денивелация

Нека сега разгледаме втората желана стойност – минималната сума от височина на всички върхове/долове. Ясно е, че щом минимизираме сумата, то искаме всички точки да са възможно най-ниско. Понеже колкото по-ниско е даден дол, толкова по-ниско е възможно да разположим върховете около него, то можем да сме сигурни, че е оптимално да разположим всички долове възможно най-ниско. В такъв случай:

- Ако $L_{max} - U_{min} \geq D_{max}$, т.е. минималната денивелация се определя от ограниченията на точките с известна височина, то знаем че със сигурност всички точки ще са с височини в интервала $[U_{min}, L_{max}]$. Съответно е оптимално да сложим всички неизвестни долове на височина точно U_{min}
- Ако $L_{max} - U_{min} < D_{max}$, то имаме избор за интервала от височини, в който ще бъдат точките ни (трябва да е интервал с дължина D_{max}, който изцяло покрива интервала $[U_{min}, L_{max}]$). Понеже искаме височините да са минимални, то избираме и най-ниския такъв интервал, който е $[L_{max} - D_{max}, L_{max}]$. Съответно е оптимално да сложим всички неизвестни долове на височина точно $L_{max} - D_{max}$

След разполагане на всички долове остава да разположим и върховете. Ако a_i е връх, то към съществуващото му ограничение $a_i \geq L_i$ трябва да добавим и ограниченията създадени от вече разположените съседни долове, съответно

$$a_i \geq h_{a_{i-1}} + (a_i - a_{i-1})$$

$$a_i \geq h_{a_{i+1}} + (a_{i+1} - a_i)$$

Тези три ограничения са необходими и достатъчни, съответно е оптимално да изберем най-малката възможна стойност за да минимизираме желаната сума. В такъв случай избираме

$$h_{a_i} = \min\left(L_i, h_{a_{i-1}} + (a_i - a_{i-1}), h_{a_{i+1}} + (a_{i+1} - a_i)\right)$$

Така вече височините на всички върхове и долове са избрани, и е достатъчно просто да изведем сумата им. Това решава втората част от задачата.

Автор: Енчо Мишинев
Начална идея: Павел Петров