**Анализ на решението на задача**

**Пътуване**

Задачата за намиране на най-дълъг прост път в произволен граф, разбира се, е NP –пълна. Но не и когато върху графа са наложени подходящи ограничения. В случаят, зададеният граф е със свойството всяко ребро да участва в точно един цикъл – такъв граф наричаме *гладък кактус* (в общия случай кактусът може да има и дървовидни израстъци съставени от ребра, които не участват в нито един цикъл, което би направило задачата по-трудна). Решението на задачата се основава на следната:



***Теорема.*** Най-дългият прост път в гладък кактус от връх *А* до връх *В* преминава през същите цикли, през които и най-късият път между *А* и *В*.

Докозателството на Теоремата се основава на факта, че прост път не може да влезе в произволен цикъл, защото за да излезе от него ще трябва да премине втори път през върха през който е влязъл. На фигурата в червено е показан един най-къс път между зададените в примера върхове 2 и 5 – 2,3,10,6,5. Той преминава последователно през циклите *X*, Y и *Z*. Най-дългият път, съгласно теоремата трябва да премине през същите цикли. Разликата е, че вместо да излезе по-най бързия начин от поредния цикъл, най-дългият път го преминава в обратната посока – ако двете възможни преминавания през поредния цикъл са равни по дължина, тогава е все едно коя от двете посоки ще изберем.

Технически, авторовото решение прави следните стъпки:

1. Намира циклите на гладкия кактус – за това е достатъчно едно подходящо модифицирано обхождане на графа в дълбочина, което правим итеративно с използване на собствен стек, за да може, когато се затвори цикъл, да извадим върховете му от стека. Сложността на тази стъпка е *O*(*M*)= *O*(*N*).
2. Намираме най-къс път в графа от връх *А* до връх *В* с едно обхождане в ширина*,* като го редуцираме така, че в получената редица да участват само *А*, *В* и върховете които са общи за два съседни в пътя цикъла. Сложността на тази стъпка също е *O*(*N*). В примера, най-късият път се редуцира до 2,10,6,5, като 2 и 10 са в цикъла *X*, 10 и 6 – в цикъла *Y*, а 6 и 5 – в цикъла Z. Тук специфична сложност има намирането на общия за всеки два съседни в редуцирания път върха, което зависи от това в колко цикъла участва всеки от върховете, но емпирично погледнато – сложността не е голяма.
3. Последната стъпка е за всеки два съседни върха в редуцирания път да намерим дължината на по-дългия от двата пътя от единия до другия в общия им цикъл. Резултатът е сума от тези дължини. Сложността отново е *O*(*N*).

Алтернативно решение за неголям брой от точките може да бъде имплементирано с базов вариант на техниката Backtracking, а при добавяне на някои оптимизации може да се постигнат и по-голям брой точки.

 *Автор:Красимир Манев*