АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
НАМЕРЕТЕ МИНИМУМА

Подзадача 1

Питаме за стойността на всяко число A[0], A[1], …, A[N - 1] с N въпроса, и връщаме минимума.

Подзадача 2

Правим K двоични търсения за всяка точка на пречупване (смяна на нарастване/намаляне) i1, i2, …, iK от условието. Отговора ще е или един от двата края на масива (0 или N - 1), или стойността на масива в някоя точка на пречупване.
Знаем, че няма да има точка на пречупване между индекси i и j (j > i) ако:

- A[j] = A[i] + (j - i) : масива само расте между i и j
- A[j] = A[i] - (j - i) : масива само намалява между i и j

Търсим първата точка на пречупване в интервал [L, R) като питаме дали между точките L и M = (L + R) / 2 има точка на пречупване. В зависимост от отговора, търсим първата точка на пречупване в [L, M) или [M, R).
Започваме първото двоично търсене с интервал [0, N). Като намерим i1, правим двоично търсене за [i1, N) и т.н.
Необходимият брой стъпки за това решение е K * log N.

Подзадача 3

Решение на задачата с 2K + 1 заявки.
Първо питаме за A[0] и A[N - 1]. Нека **a** = A[0], **b** = A[N - 1]. После питаме за стойността на точката на пречупване ако има точно 1 пречупване.
По конкретно индекса му е **x = (0 + N-1 + a - b) / 2**.
Б.О.О. **a <= b**

1. Ако стойността му е **a-x** то със сигурност това е минимума в интервала 0 до N-1 от масива и задачата е решена.
2. Ако стойността му е **a+x** то няма как да има число по-малко от **a** в интервала (числата до индекс **2x** са по-големи от **a** защото числото с индекс **x** е **a+x**, а числата с индекс повече от **2x** са по големи от **a**, защото **N-1**-вото число е **b**). Следователно отново сме решили задачата в интервала.
3. Ако стойността му е различна от **a+x** и **a-x** сред индексите 1, 2, 3, ..., x-1 има поне една точка на пречупване. Също така и сред индексите x+1, x+2, ..., N-2 има точка на пречупване. Сега решаваме същата задача за тези два интервала.

Така на всеки ход или решаваме даден интервал, или го разбиваме на два по-малки, но максималния брой пъти, които можем да го разбием на два по-малки е K-1. Защото във всеки от тях има точка на пречупване. В началото имаме 1 интервал и имаме най-много K точки на пречупване.

Тоест общо правим най-много 2 + К-1 + К = 2К+1 заявки.

Подзадача 4

Представяме решение на задачата, което изисква най-много K + 4 заявки. Работим по подобен начин като подзадача 3, и пазим набор от интервали, в които ще търсим точки на пречупване.
Няма да питаме за най-малката възможна стойност в произволен интервал. Вместо това ще питаме за най-малката възможна стойност в този интервал, който може да достигне най-малка стойност спрямо всички интервали, с които разполагаме.
Тоест, ако в един момент получим като отговор най-малката възможна стойност за избрания интервал, ние ще знаем, че сме решили задачата за всички интервали. Тоест, за [0, N - 1].
Първо питаме за A[0], A[N - 1]. Можем да докажем, че след още K + 2 въпроса, питайки както по-горе, решението на задачата ще е най-малката стойност, която сме срещнали измежду всички отговори.

Доказателство

Използваме възможните стойности на отговор както са в подзадача 3 (1. - възможно най-малка стойност, 2. - възможно най-голяма стойност, 3. - междинна стойност)
Ако в някой момент получим отговор 1. задачата е решена.

Наблюдение

След като разцепим интервал [L, R] на интервали [L, x], [x, R] с отговор тип 3., най-малката възможна стойност за интервал [L, x] е равна на най-малката възможна стойност за интервал [x, R]. (Докажете като използвате рисунка и еднакви триъгълници)

Да допуснем, че винаги получаваме отговор 3. Всеки път, когато видим отговор тип 3., знаем че разбиваме нашия интервал на 2 интервала, всеки от които има точка на пречупване. След K + 1 въпроса, имаме K интервала с точки на пречупване. Има точно два масива A, които удовлетворяват информацията, която имаме досега. Тоест, след още най-много три въпроса, ще сме питали за глобалния минимум (Докажете като използвате наблюдението).

Ако получим отговор тип 2. за индекс x в интервал [L, R] (БОО, A[L] <= A[R]), тогава знаем, че в [L, x] няма точка на пречупване. В [x, R] има точка на пречупване, но няма смисъл да питаме за който и да е индекс в интервал [x, R].
Най-лошият случай, за този, който пита, е да има точно една точка на пречупване в [x, R]. Ако има повече от една точки на пречупване в [x, R], ние не влошаваме решението си. (Приготвени сме да “изхабим” по един въпрос за всеки интервал, в който има поне две точки на пречупване - виж случая с отговори тип 3.)

Колко често може да има точно една точка на пречупване в [L, R] и да изхабим въпрос?
След като питаме за [L, R] и получим отговор тип 2., стойностите в [L, R] ще имат форма Λ. Между всеки две форми /\ имаме нечетен брой точки на пречупване. Също така, заради наблюдението и алгоритъма, който ползваме, между две форми /\ имаме четен брой точки на пречупване. Това видимо противоречие съществува докато не сме разбили K-то точки на пречупване в K различни интервала.
Ако се опитаме да разбием K-то точки на пречупване в K интервала, ще забележим, че имаме точка на пречупване в някоя от крайните точки L, R на някоя форма /\, която сме получили след отговор тип 2. (вижте го на картинка).
Ако между две форми /\ има J точки на пречупване, ние ще получим отговор тип 1. преди да имаме J интервала с точки на пречупване между двете форми /\ (тъй като едната точка на пречупване е там, където сме питали, L или R - няма да влезе в интервал). Това ни спестява въпроса, който сме изхабили като получихме отговор тип 2.
Тоест, не влошаваме решението като получим отговор 2. Подробно доказателство се оставя като упражнение.

Автори на анализа и решенията: Йордан Чапъров, Даниел Атанасов