АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА 100…0

Основни съображения

Задачата предполага реализация на изчерпващ алгоритъм и извличане на подходящи евристики от получените резултати. Съществуването на „хубави“ конструкции, които подлежат на обобщение, може да се предположи от факта, че алгоритмите за поразрядно събиране и изваждане са абсолютно еднотипни за коя да е бройна система.

Тъй като сложността на изчерпването може грубо да се пресметне като $O(3^{p-1})$ (на всяко място между две p-ични цифри може да се извърши събиране, изваждане или конкатенация), не е лошо и тази реализация да е оптимизирана в някаква степен. Ако при моделирането се използва `(unsigned) long long`, числото 0123456789ABCDEF (в стандартен шестнайсетичен запис) се събира, което значи, че някаква статистика може да се направи поне до p=16. При по-добри реализации тази граница може да се вдигне, което е предпоставка за предварително изчисляване на резултати, например. Но и дотам при внимателно наблюдение можем да изведем следните правила и конструкции:

- при p=4k + 1 задачата няма решение;

решение с k завършващи нули (за всяко естествено k) дават конструкциите:

- при p=4k + 2: $\underbrace{\ldots\cdots.}_{k+2} - \underbrace{\ldots\cdots.}_{k} - \underbrace{\ldots\cdots.}_{k} + \underbrace{\ldots\cdots.}_{k}$;
- при p=4k + 3: $\underbrace{\ldots\cdots.}_{k} - \underbrace{\ldots\cdots.}_{k+1} - \underbrace{\ldots\cdots.}_{k+1} + \underbrace{\ldots\cdots.}_{k+1}$.

Случаите, при които p е кратно на 4 (p=4k) се оказват най-интересни. По-долу са описани конструкции, които дават решение с k-2 нули.

Начинът на оценяване подсказва, че трябва изрично да се погрижим за по-малките стойности на p: при тях и малко отклонение от оптимума се отразява чувствително на крайния резултат.

Описаните конструкции не са единствени: могат да бъдат забелязани и още много повече, които дават решение с брой нули, близък до k.

Някои доказателства

Първо ще докажем, че когато p има вида 4k + 1, задачата няма решение.

Наистина, да поставим плюсове и минуси между някои от цифрите в редицата 1, 2, ..., (p – 1) и да означим стойността на получения израз с S. Да заменим всички плюсове с минуси – четността на S не се променя. Да заменим след това всяко събираемо със сумата от цифрите му – четността на S отново не се променя. Следователно, S има същата четност като сбора $1 + 2 + \ldots + (p - 1)$. Понеже p има вида 4k + 1, този сбор е четен. От друга страна, обаче, всяко p-ично число от вида 100…0 е степен на p и следователно е нечетно. Достигнахме до противоречие.

Да помислим сега как можем да построим пример, в който се получават голям брой нули.

Стратегията ни ще бъде следната. Ще образуваме няколко много големи събираеми, чийто сбор е много близък до p-ично число от вида 100…0. След това ще използваме останалите цифри, които не участват в тези събираеми, за да извършим фина калибровка и да направим крайния резултат точно равен на такова число.

При такава стратегия, в повечето разряди от нашия израз ще се срещат само цифри от големите събираеми. Да разгледаме няколко последователни такива разряда. Ако в разряд n се срещат цифрите a, b, c, d, e, …, то тогава в разряд n – 1 ще се срещат цифрите a + 1, b + 1, c + 1, d + 1, e + 1, …, в разряд n – 2 ще се срещат цифрите a + 2, b + 2, c + 2, d + 2, e + 2, …, и така нататък.

Нека знакът на първото голямо събираемо е ε_1, на второто – ε_2, и така нататък, където всеки от ε-ите е равен на +1 или –1. Тогава цифрите в разряд n ще имат сума $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c + \varepsilon_4 d + \varepsilon_5 e + \ldots$, тези в разряд $n - 1$ ще имат сума $\varepsilon_1(a + 1) + \varepsilon_2(b + 1) + \varepsilon_3(c + 1) + \varepsilon_4(d + 1) + \varepsilon_5(e + 1) + \ldots$, тези в разряд $n - 2$ ще имат сума $\varepsilon_1(a + 2) + \varepsilon_2(b + 2) + \varepsilon_3(c + 2) + \varepsilon_4(d + 2) + \varepsilon_5(e + 2) + \ldots$, и така нататък.

Най-естественият начин сумата на големите събираеми да се окаже близка до p-ично число от вида 100…0 е да нагласим a, b, c, d, e, … и ε-ите така, че или във всеки от тези разряди сумата на цифрите да се получава 0, или във всеки от тези разряди сумата на цифрите да се получава $p - 1$.

Лесно се вижда, че когато имаме едно, две или три големи събираеми, това не може да се направи. От друга страна, с четири големи събираеми можем да подберем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$. Тогава във всеки от тези разряди сумата ще бъде $a + b - c - d$, и можем допълнително да подберем a, b, c и d така, че това да е равно на 0 или $p - 1$.

Сега ще представим най-добрите реализации на тази стратегия, известни на авторите на задачата.

Нека p има вида $4k + 2$. Тогава можем да получим k нули по следния начин:

$[1\ 2\ \ldots\ (k + 1)] - [(k + 2)\ (k + 3)\ \ldots\ (2k + 1)] -$
$- [(2k + 2)\ (2k + 3)\ \ldots\ (3k + 1)] + [(3k + 2)\ (3k + 3)\ \ldots\ (4k + 1)]$.

Нека после p има вида $4k + 3$. Тогава можем да получим k нули по следния начин:

$[1\ 2\ \ldots\ (k - 1)] - [k\ (k + 1)\ \ldots\ 2k] -$
$- [(2k + 1)\ (2k + 2)\ \ldots\ (3k + 1)] + [(3k + 2)\ (3k + 3)\ \ldots\ (4k + 2)]$,

или, с малко повече вмъкнати плюсове и минуси, така:

$- [1\ 2\ \ldots\ k] - (k + 1) + (k + 2) - [(k + 3)\ (k + 4)\ \ldots\ (2k + 2)] +$
$+ [(2k + 3)\ (2k + 4)\ \ldots\ (3k + 2)] + [(3k + 3)\ (3k + 4)\ \ldots\ (4k + 2)]$.

Най-труден е случаят, в който p се дели на 4. Ако p има вида $4k + 8$, тогава можем да получим k нули както следва:

$-1 - [2\ 3\ \ldots\ k] + [(k + 1)\ (k + 2)\ \ldots\ 2k] -$
$- [(2k + 1)\ (2k + 2)] - [(2k + 3)\ (2k + 4)] +$
$+ [(2k + 5)\ (2k + 6)\ \ldots\ (3k + 4)] - [(3k + 5)\ (3k + 6)\ \ldots\ (4k + 4)] +$
$+ [(4k + 5)\ (4k + 6)] - (4k + 7)$,

или, с малко повече вмъкнати плюсове и минуси, така:

$[1\ 2\ \ldots\ k] - [(k + 1)\ (k + 2)\ \ldots\ (2k - 1)] +$
$+ 2k + (2k + 1) + [(2k + 2)\ (2k + 3)] + [(2k + 4)\ (2k + 5)] -$
$- [(2k + 6)\ (2k + 7)\ \ldots\ (3k + 4)] + [(3k + 5)\ (3k + 6)\ \ldots\ (4k + 3)] -$
$- (4k + 4) - [(4k + 5)\ (4k + 6)] - (4k + 7)$.

В резюме, за всяко p, което дава остатък 2 или 3 при деление на 4, можем да получим цяла част от $p/4$ нули като вмъкнем три символа, и за всяко $p \geq 16$, което дава остатък 0 при деление на 4, можем да получим $p/4 - 2$ нули като вмъкнем девет символа.

От нашите разсъждения не следва, че тези конструкции са оптимални (и авторите на задачата не знаят дали те наистина са такива). Може, обаче, да се докаже, че нашите конструкции са асимптотически оптимални. С други думи, когато p расте неограничено, отношението на оптималния брой нули към броя нули, даден от нашите конструкции, клони към единица.

Сега ще скицираме накратко едно такова доказателство. Достатъчно е да покажем, че съществува такава константа c, че за всички p от някое място нататък няма как да получим повече от $p/4 + c$ нули.

Да фиксираме, например, $c = 20$ и $p \geq 20$ и да допуснем, че съществува решение с поне $p/4 + 20$ нули. Да разделим всички членове в това решение на p^l, където $l \geq$

$p/4 + 1$, и да премахнем дробните части. Може да се докаже, че грешката от закръглянето няма да надхвърля единица. При това ще останат само един, два или три ненулеви члена, образуващи израз със стойност, която се различава с не повече от единица от степен на p.

Можем освен това да изберем l така, че всеки от оставащите ненулеви членове да има поне четири цифри. Да разгледаме полученото равенство по модул p^3. Ще се получат едно, две или три p-ични числа от вида $\pm[a\,(a+1)\,(a+2)\,(a+3)]$, чиято сума дава остатък нула или ± 1 при деление на p^3. Но с разглеждане на случаи може да се докаже, че това е невъзможно.

Автор: Николай Белухов
Тестове и реализации: Павлин Пеев