АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
РАЦИОНАЛНИ ЧИСЛА

Описаното в задачата дърво се появява за първи път в работите на немския математик Щерн (1858 г.) и на френския часовникар Броко (1860 г.). Щерн се е интересувал от намиране на начин за номериране на всички рационални положителни числа. Работата на Броко е имала практически характер и е давала съвети как да се избират предавки за часовникови механизми. В тяхна чест то се нарича дърво на Щерн-Броко.

Първо ще отбележим, че даденото дърво е пълно двоично дърво за търсене.

Ще разгледаме следните две подзадачи:

Подзадача 1: Как по номер на връх от дървото може да разберем какъв е пътят от корена до него? Достатъчно е да разгледаме двоичното представяне на номера. Като започнем от втората цифра на числото, при срещане на 0 в записа на числото трябва да се придвижим наляво, а при срещане на 1 – надясно.

Подзадача 2: Как по известна дроб, записана във връх на дървото може да разберем какъв е пътят от корена до него? Тъй като дървото на Щерн-Броко е двоично дърво за търсене, тръгвайки от корена проверяваме дали интересуващата ни дроб е равна, по-малка или по-голяма от дробта, записана в съответния връх на дървото. Ако е равна, пътят е открит. Ако е по-малка, се придвижваме по дървото към левия наследник на съответния връх; ако е по-голяма – към десния наследник на съответния връх. Продължаваме да се движим по същите правила, докато не открием интересуващата ни дроб.

Като се използват описаните идеи лесно се решават и обратните подзадачи: по известен път от корена до върха да се определи номера на върха и дробта, записана в него.

За намирането на най-близкия общ предшественик на двата върха е достатъчно да открием съвпадащата част в началото на пътищата от корена до единия и до другия връх. Ако този път води до връх, различен от двата, този връх е техен най-близък предшественик, а ако води до един от двата върха, то родителят на този връх е най-близък общ предшественик на двата върха.

Тъй като първият връх е зададен с номера си, който не надвишава 10^{18}, може да се пресметне, че по пътя до този връх има най-много 59 ребра. Такъв път не създава особени проблеми и за запомнянето му може да се използва низ от нули и единици, който ще има малка дължина. Проблем може да създаде върхът, който е зададен чрез дробта, записана в него. При дадените ограничения в условието на задачата ($0 < a_2 < 10^9$, $0 < b_2 < 10^9$) има ситуации, в които той е доста отдалечен от корена. Определянето на пълния път до него може да изисква много големи ресурси от време и памет. Този проблем лесно се преодолява, като се съобрази, че търсеният предшественик със сигурност има по-малък номер от номерата на двата зададени върха. Следователно търсеният общ път е с дължина, по-малка от 60 и за такива проблемни върхове е достатъчно да намерим само началото на пътя до тях (например първите 61 ребра).

Автор: Младен Манев