АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ПОСЛЕДОВАТЕЛНИ КУБОВЕ

Известна е формулата за изчисляване на сумата от кубовете на първите n естествени числа:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

С нейна помощ константно можем да изчисляваме сумата от кубовете и на всяка редица от последователни естествени числа. Изчерпвания, използващи такава идея, могат да доведат до частични резултати.

Стандартните изчерпващи идеи включват:

- Предварително изчисляване. При добра кодировка (например в 32 бита, 5 от които за дължина, а в останалите – кодираното представяне, например 0 за + и 1 за –), в допустимите граници за сорс-кода могат да се съберат представянията на (първите) около 7800 числа.
- Динамично изграждане на пирамида. За всяко следващо ниво на пирамидата е необходимо само предишното, при добро кодиране на пътя и добра реализация, има възможност ресурсите от памет и време да доведат до частични решения.

Всъщност, ще покажем, че представяне на естественото число N във вида $N = \pm 1^n \pm 2^n \pm 3^n \pm \cdots \pm k^n$ съществува за всяка степен n.

Да означим с $p_0(x)$ полинома x^n. Образуваме редицата от полиноми $p_k(x)$ за $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ в която $p_{k+1}(x) = p_k(x + 2^k) - p_k(x)$. Ще докажем по индукция, че $p_k(x)$ е полином на x от степен точно $n - k$ със строго положителни коефициенти за всяко $1 \le k \le n$.

Твърдението е очевидно за $k = 1$: $p_1(x) = (x + 1)^n - x^n$. Да допуснем, че твърдението е вярно за k и нека

$$p_k(x) = a_{n-k}x^{n-k} + a_{n-k-1}x^{n-k-1} + \ldots + a_0.$$

Тогава полиномът $p_{k+1}(x) = a_{n-k}[(x+2^k)^{n-k} - x^{n-k}] + a_{n-k-1}[(x+2^k)^{n-k-1} - x^{n-k-1}] + \ldots + a_1[(x+2^k) - x^1]$, от степен точно $n - (k + 1)$, представлява сума от полиноми със строго положителни коефициенти и включва като събираемо поне един едночлен от всяка степен, по-малка от $n - k$. Твърдението е доказано.

Да разгледаме полинома $p_n(x)$. Той е от нулева степен със строго положителни коефициенти, т.е., представлява просто една положителна целочислена константа c (стойността на c може да се определи точно: тя е $2^{1+2+\ldots+(n-1)}.n!$). Имаме

$$p_0(x) = x^n$$
$$p_1(x) = (x + 1)^n - x^n$$
$$p_2(x) = (x + 3)^n - (x + 2)^n - (x + 1)^n + x^n$$
$$\ldots$$
$$p_n(x) = (x+2^n-1)^n-(x+2^n-2)^n-(x+2^n-3)^n+\ldots-(x+1)^n+x^n = c.$$

С други думи, за всяко едно естествено число s в сумата

$$\pm s^n \pm (s+1)^n \pm (s+2)^n \pm \ldots \pm (s+2^n-1)^n$$

можем да изберем знаците плюс и минус по такъв начин, че да получим точно c (по-точно, знакът на i-тото събираемо зависи от това дали сумата от цифрите в двоичния запис на i е четна или нечетна).

Това означава, че за всяко естествено число N е достатъчно да намерим само сума от вида

$$\pm 1^n \pm 2^n \pm 3^n \pm \cdots \pm m^n,$$

която е сравнима с N по модул c. След това можем да допишем към тази сума още $2^n t$ члена (от $\pm(m + 1)^n$ до $\pm(m + 2^n t)^n$) и да изберем техните знаци по такъв начин, че да

прибавим или извадим произволно кратно tc на числото c. При подходящ избор на t сумата ще се окаже точно равна на N със $s = m + 2^n t$.
Остава да покажем как за всяко естествено число N може да бъде намерена сума от вида

$$\pm 1^n \pm 2^n \pm 3^n \pm \cdots \pm m^n,$$

която е сравнима с N по модул c.
Ако N е четно, разглеждаме сумата

$$\pm 1^n \pm 2^n \pm 3^n \pm \cdots \pm cN^n$$

Ако пък N е нечетно, разглеждаме сумата

$$\pm 1^n \pm 2^n \pm 3^n \pm \cdots \pm [c(N-1)+1]^n$$

И в двата случая знаците определяме по следния начин:

- Първо поставяме знак „плюс“ пред всички членове i^n, за които i е сравнимо с 1 по модул c.
- След това, за всяко $r = 2, 3, 4, \ldots, c$, пред всички членове i^n, за които i е сравнимо с r по модул c, поставяме алтернативно знаци „плюс“ и „минус“ по такъв начин, че те взаимно да се унищожат (и в двата случая техният брой е четен за всяко r).

При това цялата сума ще се окаже сравнима по модул c с $1+1+\ldots+1 = N$. С това съществуването на търсеното представяне е доказано.
В конкретната задача имаме $n = 3$, $c = 48$ и, вместо да прилагаме конструкцията от доказателството, можем просто предварително да намерим представяния за числата от 0 до 47. След това, за да получим представяне на числото $48A + B$, допълваме представянето на B с още $8A$ събираеми, като използваме тъждеството

$$-x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 - (x+3)^3 + (x+4)^3 - (x+5)^3 - (x+6)^3 + (x+7)^3 = 48,$$

т.е., добавяме към изхода $8A$ пъти символния низ −++−+−−+. Тъй като неговата дължина е 8, порядъкът на дължината на изхода става $N/6$.
За пълно решаване на задачата е нужна още една крачка. Оказва се, че има и по-продуктивни тъждества, инспирирани от горното. Полиноми като горния са от трета степен и, следователно, ако за 4 стойности на x те дават един и същи резултат, те са тъждествено равни на него. Една помощна програма, проверяваща това, ще ни подскаже, че редицата от знаци

−−−++++−++++−−−−+−−−−+++,

например, която е дълга само 24 символа, винаги се изчислява като константата 4176. Както казахме в началото, добре кодирани представяния на първите 4176 числа (започвайки от 0) се събират в рамките на позволения размер на сорс-кода (впрочем, те и се изчисляват достатъчно бързо), което дава възможност да се подобри резултатът от алгоритъма, като изходът се скъси до указаните граници. Решението остава линейно по дължината на изхода.

Автор:Николай Белухов
Решение: Павлин Пеев