АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
СУМА ОТ P-ИЧНИ ЦИФРИ

Наивното обхождане на естествените числа в интервала [M, $M+N$) с отделяне на p-ичните цифри на всяко число чрез деление и сумирането им носи до 5% от точките. „Бонусът“ се дава, за да се отсеят още по-наивни решения. Алгоритъмът е със сложност $O(N.\log_p N)$.

Ако се използва подобен на долния алгоритъм за силно редуциране на вътрешния цикъл с деление (т. е., постигане на сложност, близка до $O(N)$), са предвидени до 30% от точките.

Алгоритъм за (практически) игнориране на множителя $\log_p(N)$ от сложността

Сумата X от стойностите на цифрите на едно число A, записано в p-ична бройна система, лесно може да се получи от съответната сума S на предишното число (A-1).

- Присвояваме на X стойността на S;
- Докато последната цифра на (A-1) е със стойност p-1, намаляваме X с p-1 и полагаме (A-1):=[(A-1)/p];
- Увеличаваме X с едно.

По-нататъшното ускоряване на пресмятанията изисква по-задълбочено разглеждане.

Ще дефинираме функцията $f(n)$ за сумата от първите n неотрицателни цели числа:

$$f(n) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Означаваме със $\sigma(n, p)$ сумата от стойностите на цифрите за **всички** n-цифрени числа (с водещи нули) в p-ична бройна система. За целта можем да си представим, че в n вложени цикъла n брояча заемат стойности от 0 до p-1: във всеки брояч стойността на всяка от цифрите ще се появи p^{n-1} пъти, т.е., сумата от стойностите на всички p-ични цифри (която е равна на $f(p) = \frac{p(p-1)}{2}$) ще се появи $n.p^{n-1}$ пъти, следователно

$$\sigma(n,p) = np^{n-1}f(p) = np^{n-1}\frac{p(p-1)}{2} = \frac{np^n(p-1)}{2}.$$

В обяснението ще използваме стандартната позиционна схема за записване на цяло неотрицателно число A в p-ична бройна система:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_i|\, p^i = \overline{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}\cdots\alpha_1\alpha_0}_p,$$

където с α_i са означени p-ичните цифри на A, а с $|\alpha_i|$ – техните стойности. При тези означения, ако приемем, както обикновено, че със символа „0“ е означена p-ичната нула, от очевидното

$$A = \overline{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}\cdots\alpha_1\alpha_0}_p = \overline{\alpha_{n-1}\underbrace{00\cdots0}_{n-1}}_p + \overline{\alpha_{n-2}\underbrace{00\cdots0}_{n-2}}_p + \cdots + \overline{\alpha_1 0}_p + \alpha_{0_p}$$

можем да изведем следния алгоритъм за намиране на сумата от стойностите на цифрите на p-ичните числа от 0 до A включително:

1. S←0
2. i ← n-1
3. S←S + $\underline{|\alpha_i| \times \sigma(i, p)}$ + $\underline{p^i \times f(|\alpha_i|)}$ + $|\alpha_i| \times (1 + \overline{\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_0}_p)$.

   С первото добавено събираемо уреждаме всички „изцяло завъртени“ цикли, докато цифрата на място i „се завърти“ от 0 до α_i (без да достига горната граница). Второто събираемо добавя сумата от стойностите на цифрите на i-та позиция до този момент (p^i пъти всяка цифра със стойност от 0 до $|\alpha_i|$-1 включително). p-ичното число, надясно от i-тата позиция, показва колко пъти към сумата ще се добави стойността на цифрата α_i (добавяме 1, защото броим от нула до него включително). Специално при i=0 такова „число без цифри“ не съществува, полагаме нула за негова „стойност“. Третото събираемо отразява именно факта, че оттук до края на сумирането позиция i ще се заема винаги от цифрата α_i.
4. i ← i-1
5. Ако $i \geq 0$ към 3, иначе 6
6. Край на алгоритъма, резултатът е в S.

Този алгоритъм обхожда p-ичните цифри на A, т.е., сложността му е $O(\log_p A)$.

Сега вече можем лесно да намерим сумата Σ от p-ични цифри за N последователни естествени числа с начало M със сложност $O(\log_p N)$:

$$\Sigma(M, N, p) = S(M+N-1, p) - S(M-1, p).$$

Автор: Павлин Пеев