АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ

За малки стойности на n ($n < 13$) търсените редици могат да се генерират и изброят. Такава програма работи сравнително бавно дори за посочените стойности на n, поради което е добре състезателите предварително да пресметнат търсените стойности при $n < 13$. Освен това е добре за $n = 3, 4, 5$ състезателите да разгледат генерираните редици, за да си подпомогнат извеждането на рекурентна зависимост за търсения брой редици.

Има две наблюдения, които помагат съществено при извеждането на рекурентна зависимост.

1. Във всяка от генерираните редици първите две числа са с първа цифра c_1. Това е съвсем естествено, тъй като редиците са строго растящи, във всяко двуцифрено число старшата цифра трябва да има по-малка стойност от младшата и c_1 трябва да се среща точно два пъти в редицата.
2. При фиксирано n всяко от двуцифрените числа се среща по равен брой пъти в интересуващите ни редици (при $n = 3$ – по един път, при $n = 4$ – по два пъти, при $n = 5$ – по шест пъти и т. н.). Ще докажем това твърдение. Да означим с a_n търсеният брой редици при фиксирано n. Да допуснем, че двуцифрените числата ab и cd се срещат различен брой пъти в редиците. Да разгледаме изображението f, при което на всяка от редиците се съпоставя редица от същия вид като описаните в условието на задачата, която се получава по следните правила:
    - всяка цифра a се заменя с c, всяка цифра c се заменя с a, всяка цифра b се заменя с d и всяка цифра d се заменя с b;
    - ако в някое от новите числа старшата цифра е по-голяма от младшата, се разменят местата на двете цифри;
    - сортират се в растящ ред числата от получената редица.

    Изображението f е взаимно еднозначно. Да обърнем внимание, че ако подложим коя да е от разглежданите редици последователно два пъти на изображението f, ще получим първоначалната редица. От това от една страна следва, че след като преобразуваме една редица чрез f, не може да получим редица с двуцифрено число с равни цифри (в противен случай при повторното преобразуване отново ще получим число с равни цифри, а в първоначалната редица такова няма). От друга страна не е възможно като приложим f върху две различни редици, да получим една и съща редица (в противен случай при повторното прилагане на f ще получим една и съща редица, което е противоречие). Следователно при прилагането на f върху всяка от редиците, които трябва да изброим, ще получим отново всички редици. От това следва, че числото ab се среща в разглежданите редици точно толкова пъти, колкото и числото cd.

    Вече не е трудно да се съобрази, че всяко от двуцифрените числа се среща общо $\dfrac{2a_n}{n-1}$ пъти във всички редици, които ни интересуват (пребройте по два различни начина колко числа има общо във всички редици).

Сега ще изведем и рекурентната зависимост за a_n.

Лесно се съобразява, че $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ и $a_3 = 1$.

Първите две числа на редица от разглеждания вид са c_1x и c_1y. Двете цифри x и y може да изберем по $\binom{n-1}{2}$ на брой начина. Оставащата неизвестна част е редица, съдържаща $n-2$ двуцифрени числа. Има две възможности за тази редица:

1. Числото xy участва в тази редица. В този случай цифрите c_1, x и y вече са използвани по два пъти, а всяка от останалите цифри не е използвана нито веднъж. Броят на тези редици е a_{n-3}.
2. Числото xy не участва в тази редица. Да разгледаме всички редици, които са като описаните в условието на задачата с единствената разлика, че при образуването им не може да се използва цифрата c_1. Техният брой е a_{n-1}. Избирайки тези от тях, които съдържат в себе си числото xy и премахвайки числото xy от тях, получаваме всички търсени редици – техният брой е $\frac{2a_{n-1}}{n-2}$.

Следователно $a_n = \binom{n-1}{2}\left(a_{n-3} + \frac{2a_{n-1}}{n-2}\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}a_{n-3} + (n-1)a_{n-1}$.

Автор: Младен Манев