АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ЛАБИРИНТИ

За много малки стойности на n задачата може да се реши като се генерират всички възможни лабиринти и се провери колко от тях са проходими. Такова решение ще донесе малко точки на състезателите, но е полезно при тестване на същинското решение.

Решението, което ще опишем, използва динамично оптимиране по профил. Първо, тъй като най-северният и най-южният редове на лабиринта са образувани само от черни клетки, може да ги пренебрегнем и да считаме, че лабиринтите са с размери $(m-2)\times n$. Означаваме с $b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n$ вертикалните прави, които разделят стълбовете на лабиринта, като b_1 е правата между първия (най-западния) стълб и втория стълб на лабиринта, b_2 – между втория и третия стълб и т.н. Последната права b_n е вертикалната права след последния стълб, до която се допира лабиринта. Тези вертикални прави ще наричаме базови линии. Профилите на базовата линия b_i ще описват какви са възможните състоянието на полетата от лабиринта от стълба, който е наляво от тази линия, като ще искаме всички полета до тази базова линия вече да са запълнени и полученият до момента лабиринт да е проходим. При това, за да може да извършваме преход от профил на една базова линия към профил на следващата базова линия не е достатъчно да знаем дали клетките от съответния стълб са бели или черни. Всяко черно поле е непроходимо, но белите полета може да са проходими, а може и да не са. Поради тази причина профилите ще разглеждаме като троични вектори (съставени от нули, единици и двойки) с дължина $m-2$. Нулата във вектора ще означава, че съответното поле е бяло и проходимо, единицата – че е бяло и непроходимо, а двойката – че е черно (всички черни полета са непроходими). На пръв поглед изглежда, че тези профили на брой са 3^{m-2} (при ограниченията на задачата – най-много 243). Някои от тези профили обаче са невъзможни за проходими лабиринти и тях спокойно може да не разглеждаме. Такива са: профили, които не съдържат нито една нула (през такъв профил изобщо не може да се премине); профили, които съдържат съседни нула и единица (в стълб на лабиринта не може да има две съседни бели клетки, едната от които да е проходима, а другата – непроходима). Тези уточнения намаляват броя на профилите. Да означим с d_{kl} броят на начините по които от профил p_k за базова линия b_i може да се премине към профил p_l за базова линия b_{i+1}. При така въведените профили в задачата възможните стойности на d_{kl} са 0 или 1 (помислете кога d_{kl} е 0 и кога 1). Нека броят на всички профили, които са възможни за проходим лабиринт е sc. Означаваме с D матрицата

$$\begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & \cdots & d_{0,sc-1} \\ d_{10} & d_{11} & \cdots & d_{1,sc-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{sc-1,0} & d_{sc-1,1} & \cdots & d_{sc-1,sc-1} \end{pmatrix}.$$

Нека a_p^i е броят на различните проходими лабиринти, състоящи се от i на брой стълба, за които p е профил на базовата линия b_i. Означаваме с $A_i = \left(a_{p_0}^i,\ a_{p_1}^i,\ ...,\ a_{p_{sc-1}}^i\right)$ (тук $p_0,\ p_1,\ ...,\ p_{sc-1}$ са разглежданите профили). За A_i и D е вярно равенството $A_{i+1} = A_i.D$, откъдето лесно се получава, че $A_n = A_1.D^{n-1}$. Решението на задачата ще бъде сбора от елементите на вектора A_n. Да отбележим, че елементите на A_1 не винаги са само единици. Ако някоя от координатите на профил е единица, то той не може да бъде профил на първата базова линия. Остава да отбележим, че за да работи програмата за големи стойности на n, повдигането на степен на матрицата D трябва да се извърши с някой алгоритъм за бързо повдигане на степен.

Презентация, която описва по-подробно част от идеите, които се използват при решаване на задачи с динамично оптимиране по профил може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/infos/files/2011-09-20-dop.pdf.

Автор: Младен Манев