АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
ОТСЕЧКИ

За решаването на задачата е достатъчно да определим броя на целочислените решения на системата

$$\begin{vmatrix} ax+by+cz=n \\ x+y+z=m \\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0 \end{vmatrix}$$

След изразяване на x от второто уравнение и заместването му в първото, получаваме уравнението $(b-a)y+(c-a)z=n-am$. Да въведем следните означения: $b_1=b-a,\ c_1=c-a$ и $n_1=n-am.$ От условието следва, че $0<b_1<c_1$ и $n_1>0.$ Сега трябва да се реши диофантовото уравнение $b_1y+c_1z=n_1.$Решаването извършваме в следната последователност:

1. Определяме $НОД(b_1,c_1)$ като използваме алгоритъма на Евклид.
2. Ако $НОД(b_1,c_1)$ не дели n_1, диофантовото уравнение няма решение, съответно и системата няма решение. Следователно в този случай отговорът е 0.
3. Ако $НОД(b_1,c_1)$ дели n_1, разделяме b_1, c_1 и n_1 на $НОД(b_1,c_1)$. Въвеждаме следните означения $b_2=\dfrac{b_1}{НОД(b_1,c_1)}$, $c_2=\dfrac{c_1}{НОД(b_1,c_1)}$ и $n_2=\dfrac{n_1}{НОД(b_1,c_1)}$. Диофантовото уравнение добива вида $b_2y+c_2z=n_2$, като вече е сигурно, че $НОД(b_2,c_2)=1.$
4. Като използваме разширения алгоритъм на Евклид, намираме една двойка цели числа (y',z') , която е решение на диофантовото уравнение $b_2y+c_2z=1$ $(1=НОД(b_2,c_2))$, т. е. $b_2y'+c_2z'=1.$
5. След като в последното равенство умножим двете страни с n_2, получаваме $b_2(n_2.y')+c_2(n_2.z')=n_2$, а това означава, че сме намерили двойка числа $(y_0,z_0)=(n.y',n.z')$, която е решение на уравнението $b_2y+c_2z=n_2$. Тогава всички негови решения се задават с равенствата $y=y_0-c_2t,\ z=z_0+b_2t,\ t\in Z.$

Началната система добива вида

$$\begin{vmatrix} x=m-y_0-z_0+(c_2-b_2)t \\ y=y_0-c_2t \\ z=z_0+b_2t \\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, t\in Z \end{vmatrix}$$

Броят на нейните решения е равен на броя на целочислените решения на системата неравенства

$$\left| \begin{array}{l} t \geq \dfrac{y_0 + z_0 - m}{c_2 - b_2} \\ t \leq \dfrac{y_0}{c_2} \\ t \geq -\dfrac{z_0}{b_2} \end{array} \right.$$

Автор: Младен Манев