Анализ на задача "Вази"

Велислав Гърков, Румен Михов

Подзадача 1: всички A_i са равни

Нека общата височина на всяка ваза е a. Ако ширината на шкафа е w, на един рафт се побират w вази, така че броят на рафтовете е $\lceil n/w \rceil$. Всеки рафт е с височина a, следователно сумарната височина е $a \cdot \lceil n/w \rceil$. Трябва това да е $\leq H$.

Нека $k = \lfloor H/a \rfloor$ е максималният брой рафтове. Условието става $\lceil n/w \rceil \leq k$, което е еквивалентно на $w \geq \lceil n/k \rceil$. Следователно минималната ширина е $\lceil n/\lfloor H/a \rfloor \rceil$.

Сложност: $O(n)$.

Подзадача 2: има точно две различни стойности на A_i

Нека по-голямата височина е a, по-малката е b, с брой c_a и c_b. При ширина w рафтовете с максимална височина a са точно $\lceil c_a/w \rceil$, защото вазите с височина a трябва да са на върха на тези рафтове.

В последния такъв рафт може да останат свободни места за вази с височина b. Нека $\mathrm{rem} = (w - (c_a \bmod w)) \bmod w$ е броят свободни места там. Остават $c_b' = \max(0, c_b - \mathrm{rem})$ вази с височина b, които ще заемат $\lceil c_b'/w \rceil$ допълнителни рафта с височина b.

Така общата височина е $a \cdot \lceil c_a/w \rceil + b \cdot \lceil c_b'/w \rceil$. Тествайки всички w от 1 до n намираме минималното, за което сумата е $\leq H$.

Сложност: $O(n)$.

Подзадача 3: $N \leq 10^3$

За фиксирана ширина w оптималното подреждане е след сортиране по височина в намаляващ ред да запълваме рафтовете по ред. Така височините на рафтовете са точно елементите с индекси $0, w, 2w, \ldots$ в сортирания масив, а сумата им е минимална.

Затова сортираме масива и за всяка ширина $w = 1..n$ пресмятаме сумата на $A_0, A_w, A_{2w}, \ldots$ и първата, която дава сума $\leq H$, е отговорът.

Сложност: време $O(n^2)$ (проверка на всички w), памет $O(n)$.

Подзадача 4: $N \leq 10^5$

От предишната подзадача знаем, че функцията *проверка(w)* е монотонна: ако дадена ширина w е достатъчна, всяка по-голяма също е достатъчна. Това позволява двоично търсене върху w.

Стъпките са: сортиране в намаляващ ред; проверка(w) с линейно обхождане и натрупване на $A_0, A_w, A_{2w}, \ldots$; двоично търсене на минималното w, за което сумата е $\leq H$.

Сложност: време $O(n \log n)$, памет $O(n)$.

Подзадача 5: $N \leq 10^7$

Размерът налага по-бързо сортиране. Понеже $A_i \leq H \leq 10^7$, използваме сортиране чрез броене. След това прилагаме същата проверка и двоично търсене.

При проверката можем да прескачаме директно с $i += w$, тъй като са нужни само елементите $0, w, 2w, \ldots$.

Сложност: време $O(n + H + n \log n)$ в най-лошия случай, памет $O(n + H)$.