НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ИНФОРМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ 4 ФЕВРУАРИ 2023
Група А 11-12 клас

Анализ на задача Влак

Първа подзадача. За първата подзадача не са ни нужни някакви наблюдения. Използваме брут форс, за да проверим всички възможни валидни маршрути.

Сложност – **O((2 × M)!).**

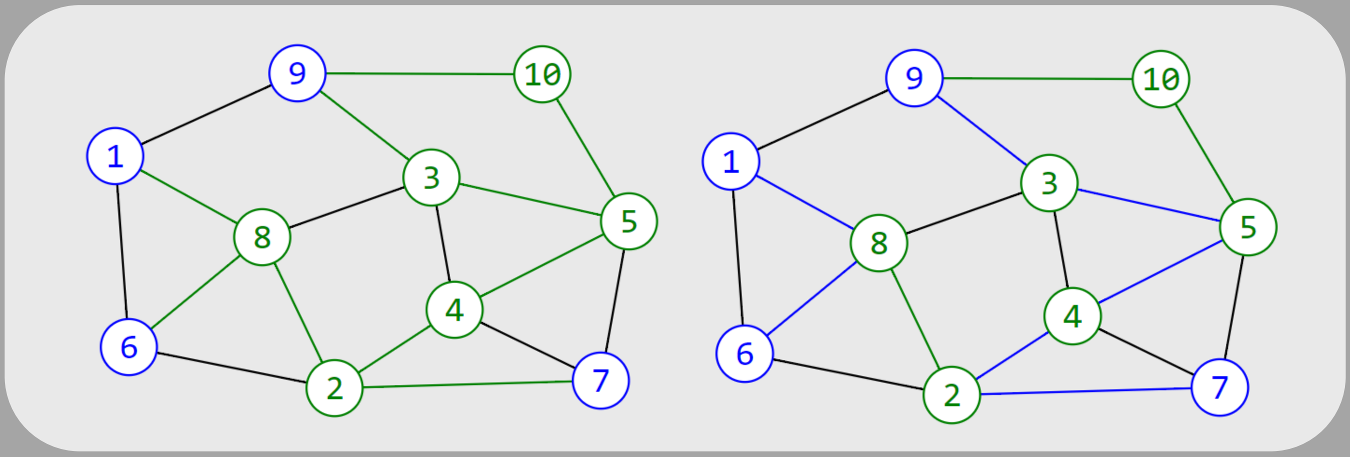
Втора подзадача. Тук имаме стандартната задача за намиране на ойлеров цикъл (затворен път, който минава през всички ребра точно по веднъж). Такъв съществува само ако степените на всички върхове са четни. Достатъчно е да приложим линейния алгоритъм за намиране на ойлеров цикъл.

Сложност – **O(N + M).**

Трета подзадача. Ще покажем, че винаги съществува път, който минава през всяко ребро точно по два пъти. Тъй като в тази подзадача всички ребра са от втория вид, можем да ги третираме като две отделни ребра, по които трябва да минем по веднъж. Но всички степени стават четни – два пъти по-големи от оригиналните. Следователно можем да намерим ойлеров цикъл в построения граф.

Сложност – **O(N + M).**

Четвърта подзадача. Време е да направим някои наблюдения. Да помислим как ни помагат ребрата, които можем да повтаряме. Без тях необходимо условие е всички върхове да са с четни степени. Но при наличието на върхове с нечетна степен, (които винаги са четен брой[1]) ще ги наричаме нечетни за по-кратко, ойлеров цикъл съществува само ако ги свържем по двойки с изкуствени ребра (подобно на задача **trams** от 2019г). В тази задача изкуствените ребра ще са пътеки, които минават по ребрата, които можем да повтаряме. На илюстрациите в синьо са оцветени нечетните върхове. Ребрата от втори тип са оцветени в зелено. На втората илюстрация е показано как можем да навържем сините върхове по двойки с пътеки.



Понеже в тази подзадача имаме само два нечетни върха, е достатъчно да видим дали има път между тях, минаващ само по ребрата от втория тип. Ако има такъв, го заместваме с едно изкуствено ребро и намираме ойлеров цикъл в оригиналния граф. При отпечатване на маршрута заместваме изкуственото ребро с намерения път. В противен случай няма решение.

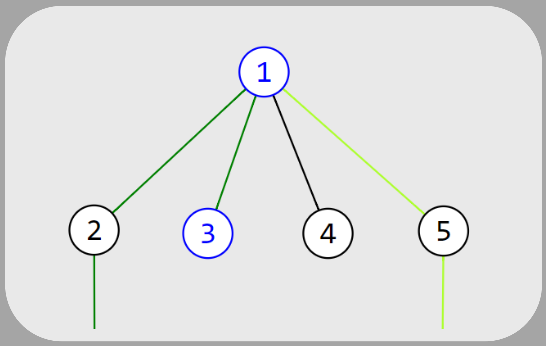
Сложност – **O(N + M).**

Пета подзадача. Остана да видим с какви пътеки да заместваме изкуствените ребра при повече от една двойка нечетни върхове. Очевидно тези пътеки не бива да имат общи ребра, защото ще има ребра, които използваме повече от два пъти. Тук идва най-сложната част, но може би не и за тези, написали една прекрасна задача на име **hotel** от пролетния СТИ 2022г.

Нека **G** е графът образуван само от ребрата от втори тип. Ако в **G** има свързана компонента с нечетен брой върхове, които в оригиналния граф са нечетни, няма решение[2]. Приемайки, че във всички останали случаи има решение, с цел да улесним задачата е логично да смятаме, че всяка свързана компонента в **G** е ,,минимално свързана“ или иначе казано е дърво. А ако не е, намираме покриваща гора на **G** и разглеждаме само нея.

Ще намираме търсените пътеки рекурсивно. Нека сме навързали максимално много нечетни върхове във всяко от поддърветата на децата някой връх **v**. С други думи във всяко поддърво е останал най-много един нечетен връх. Лесно можем да навържем тези, които са останали в поддърветата, минавайки през **v**. Ако **v** е нечетен, свързваме и него, ако можем.

На илюстрацията в синьо са оцветени нечетните върхове (в оригиналния граф, не в дървото). Има такива в три от поддърветата и самият **v** също е такъв. Може да се види, че няма значение как навързваме нечетните върхове или кой оставяме за понататък, ако общо са нечетен брой.



Остана една трики част. При отпечатване на пътеките трябва да внимаваме в коя посока ги отпечатваме (зависи в какъв ред посещаваме краищата на изкуствените ребра, на които съответстват).

Сложност – **O(N + M)**.

Някои бележки. Ще докажем две твърдения в анализа, които само споменахме.

1. Сумата от степените на всички върхове в даден граф е 2 × **M**, защото броим всяко ребро по два пъти. Ако има нечетен брой върхове с нечетна степен, крайната сума също ще е нечетна. Противоречие.

2. Нека **H** е графът образуван от всички ребра, които сме повторили в някакво валидно решение (забележете, че **G** и **H** не са един и същи граф).

Добавяйки степените на върховете в **H** към тези в оригиналния граф, трябва да получим само четни числа, защото сме намерили ойлеров цикъл. Една свързана компонента на **H** се съдържа изцяло в една такава на **G**. Също така всяка свързана компонента на **H** има четен брой върхове с нечетна степен. Ако в някоя компонента на **G** има нечетен брой върхове с нечетна степен в оригиналния граф (това не е в противоречие с 1., защото става въпрос за два графа), няма как всички те да станат четни след добавяне на степените от **H** (защото добавяме четен брой нечетни степени, а първоначално има нечетен). Следователно наистина в този случай не съществува маршрут.

Автор: Александър Гатев