Анализ на решението на задача

СЪСТАВНИ ЧИСЛА

Наивното решение се състои в последователна проверка за *x* на четните числа, на по-малки от *n*. Разбира се, това не е съвсем тривиално, защото множеството *M* е дефинирано като безкрайно. Необходим е добър алгоритъм за разпознаване на прости числа (със сложност поне $\sqrt{n}$) и някакво изследване, за да се види до кои елементи на *P* да се проверява. За входни данни до 100 000 000, например, контрапримерите, които позволяват отхвърляне на определен избор на *x*, са в рамките на 200 елемента на всяко от множествата 6*k*±1.

Сега да разгледаме ситуацията по-задълбочено.

Всички нечетни прости числа, с изключение на 3 (множеството *P*' = *P* \ {3}), са членове на редиците 6*k*±1, където *k* е цяло положително число. (Числата от вида 6*k*±2 са четни и по-големи от 2, а от вида 6*k*+3 се делят на 3, като при това са по-големи от 3.) Т. е., за всяко *p* ∈ *P*' имаме *p* ≡ ±1 (mod 6) и, следователно, *p*2 ≡ 1 (mod 6).

След това наблюдение, ясно е, че една възможност за избор на *x* е то да бъде от вида 6*k*+2, т.е. *x* ≡ 2 (mod 6). Тогава за числата в множеството *M*, с изключение на първото, ще имаме *p*2 + *x* ≡ 1 + 2 = 3 (mod 6), т.е, те ще се делят на 3 и, като по-големи от 3, ще са съставни. Другите четни избори, видовете 6*k* и 6*k*+4, водят до остатъци 1 и -1 по модул 6. Те, както се оказва, имат общи елементи с *P*.

Остава да си подсигурим такова число *x* ≡ 2 (mod 6), че 32 + *x* = *x* + 9 да е съставно, и сме намерили *x*, което поражда такова *M*, в което има само съставни числа . Първото *x* ≥ *n*, за което е изпълнено *x* да е от вида 6*k*+2 и *x* + 9 да не е просто, всъщност е и най-малкото решение на задачата. Множеството от такива числа е достатъчно гъсто, така че задачата винаги има решение в описаните граници.

Тези разсъждения водят до следния алгоритъм:

1. Намираме *x* като първото число, ненадхвърлящо *n*, което дава остатък 2 при деление на 6.
2. Проверяваме за простота числото *x* + 9.
3. Ако числото е съставно, преминаваме към т. 6.
4. Увеличаваме *x* с 6.
5. Преминаваме към т. 2.
6. В *x* е намерено най-малкото число, ненадвишаващо *n*, за което дефинираното множество *M* се състои само от съставни числа.

*Автор: Павлин Пеев*