АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА КВАДРАТ

За да решим задачата, забелязваме че трябва да намерим различните цели положителни числа c, за които c^2 се представя като сума от квадратите на две други цели числа a и b, $a^2 + b^2 = c^2$, където $0 < a \le A$ и $0 < b \le A$.

Наивното изчерпващо търсене ще даде резултат при около 60% от тестовете, поради времевите ограничения за работа на програмата. За да направим търсеното по-бързо, разглеждаме тройките числа, известни като питагорови тройки (a, b, c), за които освен равенството $a^2 + b^2 = c^2$, искаме числата в тях да нямат общ делител, т.е. да са т.нар. примитивни питагорови тройки. Тогава забелязваме, че измежду числата a и b, винаги едното е четно, а другото нечетно. Приемаме, че b е четно, тогава следва, че c е нечетно. Равенството $a^2 + b^2 = c^2$ записваме във вида $b^2 = (c + a)(c - a)$. Понеже $c + a$ и $c - a$ са четни (като сума и разлика на две нечетни числа), може да запишем

$c + a = 2x$, $c - a = 2y$ за подходящи стойности на целите числа x и y.

Решаваме системата уравнения за x и y, и получаваме

$c = x + y$ и $a = x - y$.

Понеже (a, b, c) е примитивна питагорова тройка, т.е. числата в нея са взаимно прости, следва че x и y са взаимно прости. Понеже b е четно, записваме го като $b = 2z$ и тогава от $b^2 = (c + a)(c - a)$ следва, че $4z^2 = 4xy$, или $z^2 = xy$. От това, че x и y са взаимно прости и произведението им е квадрат, следва, че самите x и y са точни квадрати, т.е. за някои цели числа m и n, $x = m^2$ и $y = n^2$. Замествайки в горните изрази за a и c, и за b, имаме:

$a = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$, $b = 2mn$.

Получихме, че всяка примитивна питагорова тройка има вида ($m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$) за подходящи стойности на m и n. Вярно е и обратното – за всяка стойност на m и n, ($m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$) е питагорова тройка (която в някои случай не е примитивна), защото

$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$

Така пробягвайки всички цели положителни m и n, за които $0 < m^2 - n^2 \le A$ и $2mn \le A$, ще получим само питагорови тройки, измежду които ще има и всички примитивни. За да получим всички търсени питагорови тройки, трябва от всяка тройка (a, b, c) да образуваме и подходящите тройки от вида (ka, kb, kc) за k = 2, 3, … В авторската програма е реализирана тази идея, но понеже при така описаното генериране на питагорови тройки (a, b, c) може да има и много повтарящи се стойности на третата компонента c, в програмата е използван класът set от STL, за да се вземат само различните по стойност такива компоненти.

Автор: Емил Келеведжиев