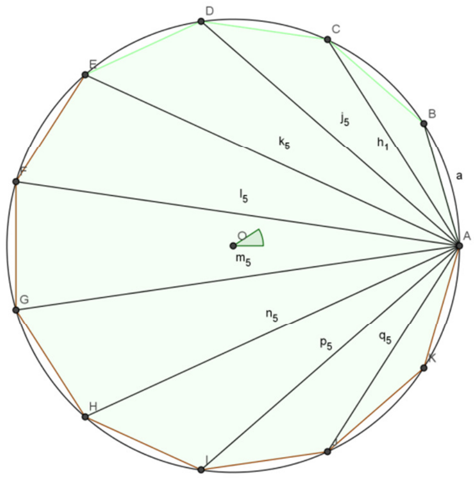
АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА ПАЯЖИНА



Всяка хорда (в частност – страна) на правилния n-ъгълник може да се разглежда като основа в равнобедрен триъгълник с бедро R и ъгъл при върха $2k\pi/n$, където k е броят на малките дъгички, които тя отсича (този триъгълник може да се изражда и в отсечка). Тогава най-просто е в него да се построи височината към основата и за един от получените правоъгълни триъгълници да се приложи Питагорова теорема:

$$\frac{a}{2} = R\sin\frac{k\pi}{n}, \text{ откъдето } a = 2R\sin\frac{k\pi}{n}$$

(може и, например, по косинусова теорема:

$$a = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R \times R\cos\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos\frac{2k\pi}{n}} = R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\frac{2k\pi}{n}} = R\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{k\pi}{n}} = 2R\sin\frac{k\pi}{n}.\text{)}$$

До същия резултат може да се стигне и по разни други начини. Формулата остава валидна и за изроден в отсечка триъгълник и е удобна за осигуряване на прецизност на предстоящите изчисления.

Страните (за които имаме $k = 1$) са $\boldsymbol{n}$ на брой, най-малките хорди (с $k = 2$) са n на брой, следващите по големина ($k = 3$) също са n на брой и т.н. Най-дългата хорда се получава за $k = [n/2]$, което за четно n дава $k = n/2$ (и броят на тези хорди е $n/2$) и $a = 2R\sin\frac{\pi}{2} = 2R$ (диаметър в окръжността), а за нечетно n ще имаме $k = (n-1)/2$, откъдето $a = 2R\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$. Търсим максималното k, за което $a = 2R\sin\frac{k\pi}{n} \le d$, т.е. $\sin\frac{k\pi}{n} \le \frac{d}{2R} \to \frac{k\pi}{n} \le \arcsin\frac{d}{2R} \to k \le \frac{n}{\pi}\arcsin\frac{d}{2R}$. Естествено, тъй като k е цяло, то търсената максимална стойност ще е $k_{max} = \left[\frac{n}{\pi}\arcsin\frac{d}{2R}\right]$. Тогава остава да преброим отсечките (страни и хорди), чиято дължина не надминава d, а това са (ако изобщо има такива) всички за k=1, 2, …, k_{max}. Техният брой може да се изчисли по следната формула:

$$C(n) = \begin{cases} \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}\text{, за } k_{max} = \dfrac{n}{2} \text{ (всевъзможните ненаредени двойки)} \\ nk_{max}\text{, за } k_{max} < \dfrac{n}{2} \end{cases}$$

Както се вижда, задачата се свежда до пресмятане на k_{max}. Ще използваме най-простия вид на получената зависимост: $a = 2R\sin\frac{k\pi}{n}$. Идеята е да приложим двоично търсене за k в интервала от 0 до $[n/2]$. Това може да се направи, тъй като, както се вижда, в този интервал a расте с нарастването на k. Това е и определящият процес, което прави решението с логаритмична сложност и трябва да решава задачата за ограниченията. Не се изисква познаването на обратни тригонометрични функции и довеждането до константна сложност.

Автор: Павлин Пеев