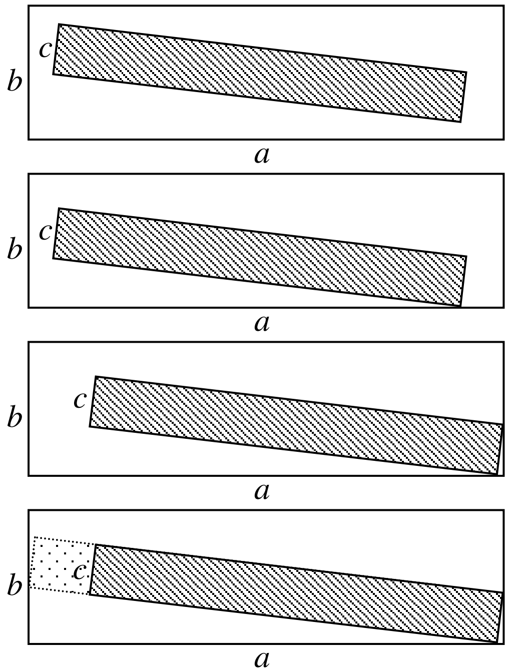
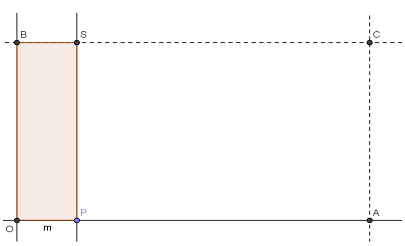
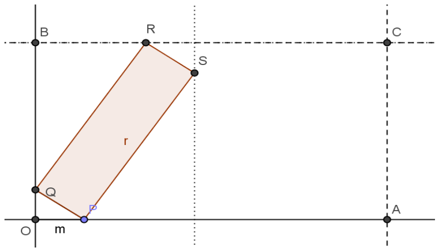
АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЕТО НА ЗАДАЧА
ЛЕНТА



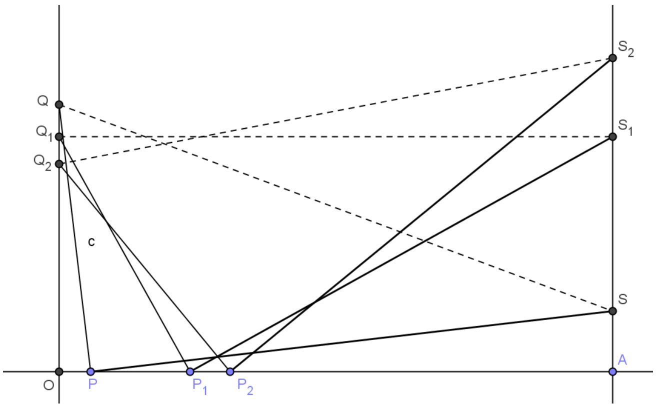
Най-напред е ясно, че поне три от върховете на лентата могат да лежат на страните на листа, например: успоредно надолу до достигане на долната страна, успоредно надясно до достигане на дясната страна, „разтягане” до достигане на лявата или горната страна (което се случи по-напред). Ако лентата е „наклонена“ на другата страна, можем преди тези действия да отразим картинката относно някоя страна на листа.

Има много начини за параметризация, с повече или по-малко математика. Без ограничение на общността можем да разположим правоъгълниците така: големият в първи

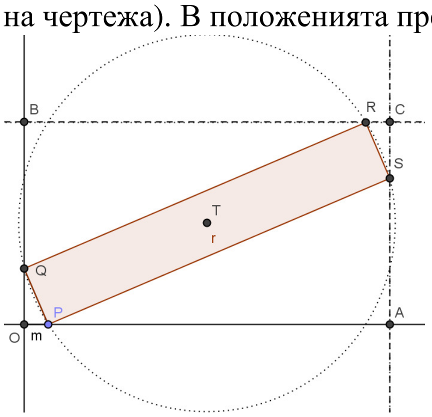




квадрант, с долен ляв ъгъл в началото на координатната система и страни, по и успоредни на координатните оси (OACB на чертежа); за малкия (PQRS) точка P върху OA, точка Q върху OB (като PQ=c), (поне) една от точките R и S съответно върху BC или AC. Да започнем от ситуацията точка P да е на разстояние c от O: ще се получи малкият правоъгълник със страни b и c (Q≡O, R≡B, S е върху BC). Разглеждаме процеса на приближаване на P към O (намаляване на m=OP). Положението на P, разбира се, еднозначно определя малкия правоъгълник. Другият краен случай се получава при m=0, т.е., когато P съвпадне с O. Тогава се получава малкият правоъгълник със страни a и c (P≡O, S≡A, R е върху AC). Той очевидно е едно добро решение (по-добро от предишния краен случай, защото е зададено a>b).



Живо ни интересува изменението на търсената страна PS по време на този процес. Ако се абстрахираме от наличието на „ограничител отгоре“ (правата BC), можем да си мислим, че имаме отсечка PQ, която се „хлъзга“ с единия край по OA и другия по OB. Нека сега P тръгва от O надясно. Триъгълник PQS е правоъгълен, катетът му PQ е с постоянна дължина c, а хипотенузата QS свързва точките Q и S, които се „движат“ в противоположни посоки. Другият катет (който ни интересува) е еднозначно определен. Най-малката си стойност QS ще постигне, когато стане перпендикулярна на успоредните прави (Q_1S_1 на чертежа). В положенията преди и след точка P_1, тъй като ъгълът между QS и успоредните прави плавно се променя, промяната е монотонна: <u>от O до P_1 – намалява, а след P_1 – расте</u> (към безкрайност).



Така в разглеждането на описания процес със сигурност се появява един особен момент (наричаме го „граничен“): този, в който и четирите точки на малкия правоъгълник лежат всяка на различна страна на големия. Този момент е специален най-малко защото след него точка S вече не е по AC, за сметка на R, която вече е върху BC, т. е., престава да съществува триъгълник PSA и започва да съществува триъгълник QRB. Така описаното движение на P се разделя на две съществено различни фази: преди и след този момент. А всъщност може да се каже много повече: има смисъл да разгледаме само първата от тези фази. При нея търсената дължина започвайки от a ($a>b$):

- намалява до достигане на граничния момент;
- намалява, след което се увеличава до достигане на граничния момент.

Ясно е, че търсеният максимум или е a, или е именно онова PS от този граничен момент.

Ако означим OQ с n, да определим m и n в този момент. Ситуацията е централно симетрична и това може да стане по различни начини. В правоъгълния триъгълник OPQ имаме $OP^2+OQ^2=c^2$. От подобието на OPQ и PAS имаме PA:OQ = AS:OP. От централната симетрия имаме OQ=SC и значи PA=a-m, AS=b-OQ. Ще имаме:

$$\left|\begin{array}{l} m^2+n^2=c^2 \\ \dfrac{a-m}{n}=\dfrac{b-n}{m} \end{array}\right.$$

Вместо с дълги математически формули, m и n можем да определим числово с необходимата точност. Тогава резултатът ще бъде $\max\left(a, \sqrt{(a-m)^2+(b-n)^2}\right)$.

Автор: Павлин Пеев